1ª Prova de Cálculo Diferencial e Integral IV - MAT221
2º semestre de 2008

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____________________*GABARITO*____________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens.
Boa Sorte!!

1. a) Determine para quais valores $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ é convergente a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(\ln\, k)^{\beta}} \ .$$

b) Determine se são convergentes ou não as séries:

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

Resolução

(a) No caso, $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$ é contínua decrescente. Apliquemos o critério da integral. Se se $y = \ln x$ então $x = e^y$, $dx = e^y dy$ e

$$I \ = \ \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^y}{e^{\alpha y} y^{\beta}}\, dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1)y} y^{\beta}}\, dy \ .$$

Se $\alpha < 1$, $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{1-\alpha}}{y^{\beta}} dy = +\infty$. Temos também, $I \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1)y}}\, dy$ pois $y^{\beta} = e^{\beta \ln y} \ge e^0 = 1$ e, se $\alpha - 1 > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1)y}}\, dy < \infty$. Assim a série convergente se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha < 1$. Se $\alpha = 1$ então $I = \int_e^{+\infty} \frac{dy}{y^{\beta}} < \infty \Leftrightarrow \beta > 1$.
Logo, a série dada converge se, e só se, $\alpha > 1$ ou, se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

(b) (i) Pelo teste da razão: $\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n!2^n}{n^n} = 2(\frac{n}{n+1})^n = 2\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1$. Logo, a série converge.

(ii) Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)}{n^{\frac{5}{3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}} \frac{\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}}{n^{\frac{5}{3}}} = 1.1 = 1$, pelo 1º limite fundamental, e $\displaystyle\sum^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} < \infty$, pelo crit. do limite a série dada converge ■

2. Ache uma fórmula para calcular $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$, $|x| < 1$.

   Sugestão: Compute $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$. Determine o raio de convergência destas duas séries de potências.

Resolução

A série dada tem, é fácil ver, raio de convergência 1.

A série geométrica de razão x têm também intervalo de convergência $(-1,1)$ e pelo teorema da derivação de uma série de potências,

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{1-x}\right\} = \frac{1}{(1-x)^2} .$$

Logo,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \frac{1}{1-x},$$

donde,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1-x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2)} \qquad \blacksquare$$

3. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$. Demonstre que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Resolução

Se $|x| \leq 1$, $\frac{|x|}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e, como $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, pelo teste M de Weierstrass a série dada converge uniforme/e e absoluta/e em $[-1,+1]$ e é integrável termo a termo.

Obtemos então,

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x}{x^2+n^2}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{log\,(x^2+n^2)}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{log\,(1+n^2) - log\, n^2}{2}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{log \frac{1+n^2}{n^2}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} log(1+\frac{1}{n^2}) \quad \blacksquare$$

4. a) Determine se a série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ \ln\ k}$ é convergente ou não.

b) Mostre que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = 1,$ com $a_k = \dfrac{1}{k\ \ln\ k}$.

Resolução

(a) A função $\frac{1}{x\ln x}$ é contínua e decrescente. Assim, pelo critério da integral, utilizando a substituição $y = \ln x$ encontramos,

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_1^{\ln N} \frac{1}{y}\,dy = \lim_{N\to+\infty} \ln(\ln N) == +\infty\ ,$$

e portanto a série diverge.

(b) O critério de Raabe é inconclusivo para tal série pois,

$$k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = k\left[1 - \frac{k\ln k}{(k+1)\ln(k+1)}\right] = \frac{k}{k+1}\left[\frac{(k+1)\ln(k+1) - k\ln k}{\ln(k+1)}\right] =$$

$$= \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{k\ln(k+1) - k\ln k}{\ln(k+1)}\right] = \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{k})^k}{\ln(k+1)}\right]$$

e, como $\lim\limits_{k\to+\infty}(1+\frac{1}{k})^k = e$, a função ln é contínua, $\ln e = 1$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1$, segue que $\lim\limits_{k\to+\infty} k(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}) = 1$ ■

5. a) Determine a série de Fourier de $f(x) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{x^2}{4}$, $\quad -\pi \leq x \leq \pi$ e esboce o gráfico de f e de sua série de Fourier.

b) Compute $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$.

c) Compute $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + ...$

d) Compute $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Solução (V. Um Curso de Cálculo, H. L. Guidorizzi, v. 4, 5ª ed, p. 161, ex. 1)

(a) Como f é par, $b_n = 0\,, \forall n \in \mathbb{N}$, e $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\,, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4})\, dx \;=\; \frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2 x}{12} - \frac{x^3}{12})\Big|_0^\pi \;= 0\;\;,$$

e, como $\forall n$, $sen n\pi = 0$ e $\cos n\pi = (-1)^n$ e, $\forall n \neq 0$, $\int_0^\pi \cos nx\, dx = 0$, temos

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)\cos nx\, dx \;=\; -\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{4}\cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(x^2\frac{sen nx}{n}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x\frac{sen nx}{n}\, dx\right) = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi x sen nx\, dx \;=$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\, dx\right) = -\,\frac{\pi(-1)^n}{n^2\pi} \;=\; \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,.$$

Finalmente, a série de Fourier de f é,

$$S[f](x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\;.$$

(b) Como f é monótona contínua por partes então $S[f] = f$ em $[-\pi, \pi]$. Logo,

$$-\frac{\pi^2}{6} \;=\; \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{4} = f(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2} \;=\; -\sum^{+\infty}\frac{1}{n^2} \;=\; -\zeta(2)\;.$$

(c) Analogamente,

$$\frac{\pi^2}{12} \;=\; f(0) = \sum^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \;=\; 1 \;-\; \frac{1}{2^2} \;+\; \frac{1}{3^2} \;+\; ..... \;+\; \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \;+ .....\quad .$$

(d) Pela fórmula de Parsevall , $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_\pi^\pi |f(x)|^2\, dx$, temos,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi^4}{144} - \frac{\pi^2 x^2}{24} + \frac{x^4}{16}\right) dx \;=$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^4 x}{144} - \frac{\pi^2 x^3}{72} + \frac{x^5}{80}\right)\Big|_0^\pi \;=\; 2\pi^4(\frac{1}{144} - \frac{2}{144} + \frac{1}{80}) \;=\; \frac{\pi^4}{90} \quad \blacksquare$$

6. Determine se a série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} \ , \quad -1 < \alpha < 0$$

é convergente ou não.

Resolução Vide 'Um Curso de Cálculo, H. L. Guidorizzi, vol.4, 5ª ed, exerc. 7, pg. 71 e notas de aula sobre Série Binomial, lema 3.

Utilizemos o **resultado**:
Se $\sum^{+\infty} |a_n|$, $a_n \neq 0\,, \forall n$, é tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}) = L > 0$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^k$ é convergente e, portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Os n fatores no numerador do termo geral da série (alternada) são negativos e,

$$a_n = (-1)^n |a_n| \quad ; \quad a_n \ = \ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} \ .$$

Procurando aplicar o critério de Raabe encontramos,

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \ = \ \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}} \right| \ = \ |\frac{\alpha-n}{n+1}| \ = \ \frac{n-\alpha}{n+1} \ ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-\frac{n-\alpha}{n+1}) \ = \ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}(\alpha+1) \ = \ \alpha+1 \ .$$

Pelo Critério de Raabe, sendo $\alpha+1<1$, $\sum^{+\infty} |a_n|$ é divergente.
Pelo resultado enunciado, pois $\alpha+1>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.
Sendo $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1$, pois $-\alpha < 1$, a sequência $(|a_n|)$ é também decrescente.
Finalmente, pelo critério de Leibnitz, $\sum^{+\infty}(-1)|a_n| = \sum^{+\infty} a_n$ é convergente ■