**MAT 221 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV (IMEUSP)**
**Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira**
**Período: Segundo Semestre de 2011**

## 5ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercícios para entregar: **4 até 14.**

1. Verifique que a fórmula

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx\,, \quad f, g \in \mathcal{R}[-\pi, +\pi],$$

define sobre $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$ um semi-produto interno que torna $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$ um espaço vetorial semi-normado com semi-norma, a semi-norma 2,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

2. O conjunto das funções complexas $\{\ \varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\,, x \in [-\pi, \pi] : n \in \mathbb{Z}\ \}$ é ortonormal:

   (a) $\|\varphi_n\|_2 = 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

   (b) $\langle \varphi_n\ , \varphi_m\rangle = \delta_{nm}$, $\delta_{nm}$ o delta de Kronecker.

3. O conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\,, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} :\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ é ortonormal em $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Isto é,

   (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = 0$.

   (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0$.

   (c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, \cos nx\, dx = \pi\delta_{nm}$.

   (d) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \pi\delta_{nm}$.

**4.** (Os coeficientes de uma série de Fourier) Verifique:

   (a) $2\cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $2i\operatorname{sen} nx = e^{inx} - e^{-inx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Dados $a_n$ e $b_n$ $(n \geq 1)$ em $\mathbb{C}$, existem $c_n$ e $c_{-n}$ (ache-os) em $\mathbb{C}$ tais que:

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = c_n e^{inx} + c_n e^{-inx}\ .$$

   (c) O polinômio trigonométrico $S_N = \sum\limits_{-N}^{N} c_n e^{inx}$ é real se, e só se, $\overline{c_n} = c_{-n}$.

   (d) Vale a relação: $2 \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$

**5.** Para $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ verifique as fórmulas abaixo.

$$(a) \qquad e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + ... + e^{nit} = \frac{e^{nit} - 1}{1 - e^{-it}} = \frac{\mathrm{sen}(n\frac{t}{2})}{\mathrm{sen}(\frac{t}{2})} e^{i(n+1)\frac{t}{2}} \ .$$

$$(b) \qquad \cos t + \cos 2t + ... + \cos nt = \frac{\mathrm{sen}\frac{nt}{2} \cos(n+1)\frac{t}{2}}{\mathrm{sen}\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2n+1)\frac{t}{2}}{2\mathrm{sen}\frac{t}{2}} \ ,$$

denominado n-ésimo núcleo de Dirichlet.

$$(c) \qquad \mathrm{sen}\, t + ... + \mathrm{sen}\, nt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\mathrm{sen}\frac{t}{2}} = \frac{\mathrm{sen}\frac{nt}{2}\mathrm{sen}(n+1)\frac{t}{2}}{\mathrm{sen}\frac{t}{2}},$$

denominado n-ésimo núcleo conjugado de Dirichlet.

Sugestão: compute as partes real e a imaginária da expressão em (a).

**6.** Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, nx}{n}$ convergem,
Sugestão: Utilize o exercício 5, acima, e o critério de Dirichlet.

**7.** Compute:

(a) $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Sugestão: veja os exercícios sobre séries de Fourier da Lista 4.

A função zeta, de Riemann, é dada por $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

**8.** Determine as séries de Fourier das funções abaixo.

(a) $f(x) = -1$ se $-\pi \le x < 0$, $f(x) = 1$ se $0 \le x \le \pi$.

(b) $f(x) = x^3$ se $-\pi \le x \le \pi$.

(c) $f(x) = x$, $-\pi \le x \le \pi$.

**9.** Compute $F$, a série de Fourier de $f$, de período $2\pi$, e esboce seus gráficos.

(a) $f(x) = 1$ se $-\pi \le x < -\frac{\pi}{2}$, $f(x) = 2$ se $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ e $f(x) = 1$ se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

(b) $f(x) = 1$, se $-\pi \le x < 0$ e, $f(x) = 2$ se $0 \le x < \pi$.

**10.** Determine uma função contínua em $[-\pi, +\pi]$ que gere a série de Fourier $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{sen}\, nx}{n^3}$.
Compute então

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \ .$$

Sugestão: Utilize a fórmula de Parseval.

**11.** Encontre uma série de Fourier para computar, com a fórmula de Parseval,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \ .$$

**12.** Calcule a soma das séries abaixo via séries de Fourier.

(a) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}$......... (b) $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3}$.........

**13.** Determine a série de Fourier em $[-\pi, \pi]$ de:

(a) $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$. (b) $f(x) = x^2 + x$.

**14.** Determine uma expansão em série de senos, no intervalo $(0, \pi)$, para as funções,

(a) $f(x) = 1$. (b) $f(x) = x^2 + x$.

15. Determine uma expansão em série de cossenos no intervalo $(0, \pi)$ para as funções,

(a) $f(x) = sen\, x$. (b) $f(x) = x + 2\pi$.

16. Seja $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, $2\pi$-periódica, $(c_n)_{\mathbb{Z}}$ a família dos coeficientes de Fourier de $f$ e a n-ésima soma parcial da série de Fourier de f: $S_N(f; x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. Verifique:

$$(a) \qquad D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{sen(N + \frac{1}{2})t}{sen\, \frac{1}{2} t}, \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z} \ ,$$

denominado n-ésimo núcleo complexo de Dirichlet.

$$(b) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1 \ .$$

$$(c) \qquad S_N(f; x) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x - t) dt \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - s) D_N(s) ds \ .$$