

**MAT 221 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV**

**Unidade: IMEUSP**

**Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

**Período: Segundo Semestre de 2011**

**3ª LISTA DE EXERCÍCIOS**

**P/ entregar: exercícios 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23 e 24, numerados em negrito.**

1. Mostre que  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  e quaisquer que sejam  $n, N \in \mathbb{N}$ , com  $N \geq n$ , temos

$$\sum_{j=n}^N z^j = \frac{z^n - z^{n+N+1}}{1-z}.$$

2. Verifique as fórmulas abaixo.

(a)  $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$

(b)  $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(c)  $\sum_{j=1}^n j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

3. Mostre que  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m z_j w_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n z_j w_k = \left(\sum_{j=1}^n z_j\right) \left(\sum_{k=1}^m w_k\right).$

4. Sejam  $(z_j)_{1 \leq j \leq n}$  e  $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$  duas seqüências finitas em  $\mathbb{C}$ . Verifique

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j} \right|^2 = \left( \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |z_j w_k - z_k w_j|^2.$$

Utilizando (a), deduza a desigualdade de Cauchy (vide Exercício 2.8).

5. Verifique a Propriedade Telescópica:

$$\sum_{k=m}^n (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_m.$$

6. Calcule, aplicando a propriedade telescópica,

(a)  $\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3].$

(b)  $\sum_{j=2}^n \frac{1}{j(j-1)}$

(c)  $\sum_{j=100}^{500} \frac{1}{j(j+1)(j+2)}$

Sugestão para (c): verique que  $\frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{j(j+1)} - \frac{1}{(j+1)(j+2)} \right)$

7. Calcule a soma da série dada.

(a)  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ .

(b)  $\sum_{k=0}^{+\infty} \pi^{-k}$ .

(c)  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$ .

(d)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ .

8. Calcule a soma da série dada

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha^n, 0 < \alpha < 1$ .

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)^2}$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$ , onde  $p \geq 1$  é um natural fixo.

9. Determine a convergência ou divergência das séries (v. Guidorizzi, Vol. 4).

(a)  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$ .

(b)  $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \log(k)}$ .

(c)  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{1+k^4}$

(d)  $\sum_{p=4}^{+\infty} \log \frac{2p}{p+1}$

(e)  $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{n^2-3n+1}{n^2+4}$ .

10. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a)  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{4k^3-k+10}$ .

(b)  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3}$ .

(c)  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}{k^2+7k+11}$ .

(d)  $\sum_{k=20}^{+\infty} \frac{2^k}{k^5}$ .

(e)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$

(f)  $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^{10}}$

(g)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$ .

11. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$ .

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$ .

(c)  $\sum_{n=3}^{+\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ .

(d)  $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{n^3+4}{2^n}$ .

12. Estude, com relação à convergência ou divergência:

(a)  $\sum_{k=27}^{+\infty} \frac{1}{k \log k \log(\log k)}$

(b)  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1}$

(c)  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^3 \log(k)}$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}}$

(e)  $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k^2+5}{k^2 (\log k)^3}$

13. Seja  $(z_n) \subset \mathbb{C}^*$ . Mostre que

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|}\right) \in (-\infty, +\infty) \text{ então } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|} = 1.$$

14. Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

- (a)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}$ ,  $\alpha > 0$ .
- (b)  $\sum_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^\alpha}$ ,  $\alpha > 1$
- (c)  $\sum_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$
- (d)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$
- (e)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ .

15. Dadas as séries  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$  e  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ , seja  $a_n$  o termo geral de cada uma delas. Verifique as afirmações abaixo.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  (Teste da razão).
- (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = 1$  (Critério de Raabe).
- (c) A primeira diverge e a segunda converge.

16. Determine os valores de  $\alpha \geq 0$  e  $\beta \geq 0$  tais que são convergentes as séries:

- (a)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$
- (b)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha}$ .

17. Seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ . Consideremos a sequência  $(|a_n|)$ ,  $n \geq 1$ , dos coeficientes binomiais  $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ . Verifique as afirmações abaixo.

- (a) Se  $-1 < \alpha$  então  $\lim a_n = 0$  e  $(|a_n|)_{n \geq n_0}$ ,  $n_0 > \alpha$ , decresce.
- (b) Se  $\alpha < -1$ ,  $\alpha$  inteiro ou não, então  $\lim a_n \neq 0$ .
- (c) Se  $\alpha < -1$  então  $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$  diverge.

18. Seja  $0 < \alpha < 1$ . Então,

- (a) A série (não alternada)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$  é convergente.
- (b) A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$  é alternada e convergente.

19. Se  $-1 < \alpha < 0$  então  $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$  converge condicionalmente.

20. Mostre que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ , satisfaz,

- (a) Diverge, se  $|x| > 1$ , qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ .
- (b) Converge absolutamente, se  $|x| < 1$ , qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ .
- (c) Se  $\alpha > 0$ , converge (absolutamente) se somente se  $x \in [-1, 1]$ .
- (d) Se  $-1 < \alpha < 0$ , converge se somente se  $x \in (-1, 1]$  e converge condicionalmente se  $x = 1$ .
- (e) Se  $\alpha \leq -1$ , converge se e somente se  $x \in (-1, 1)$ .

21. A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$  é convergente ou divergente? Justifique.

22. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

- (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n+n^2}{n^4}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1 - \cos \frac{1}{n^2})$
- (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$
- (d)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+3n+1}}{n^3(\log n)^2}$
- (e)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(\log n)^3}{n^2}$
- (f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$
- (g)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+3} - 1\right)$
- (h)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$ .

23. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

- (a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- (c)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$
- (d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$
- (e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \frac{n!}{n^n}$
- (f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$
- (g)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{n^n}$ .

24. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

- (a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- (b)  $\sum_{n \geq p}^{+\infty} \frac{n^{n-p}}{n!}$ , com  $p$  fixo em  $\mathbb{N}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+4)}$
- (d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}}$ .

25. Nos exercícios abaixo determine se a série  $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n$  é convergente ou divergente. No caso de convergência, verifique se a convergência é absoluta ou condicional.

(a)  $a_n = \frac{\sin(2n+1)}{n^{20}}$

(b)  $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n-3}{10n+4}$

(c)  $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\log n}$

(d)  $a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}$

(e)  $a_n = (-1)^n \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^3$

(f)  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\log(e^n + e^{-n})}$ .

26. Determine  $z \in \mathbb{C}$  para que a série dada seja convergente:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} z^{2n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n z^n$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ .

(e)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$

(f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}$ .

(g)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{z^n}{\log n}$

(h)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ .

(i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)z^n}{n!}$ .