MAT 221 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Unidade: IMEUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2011

2 LISTA DE EXERCÍCIOS

P/ entregar: exercícios 1, 3, 4, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22 e 30, numerados em negrito.

1. Determine $\sup X$, $\inf X, \max X$ e $\min X$ em cada um dos seguintes casos:

a) $X =]a,b[\,,\ \ ]a,b]\,,\ \ [a,b[$ ou $[a,b]$; com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

b) $X =]-\infty, a]\,,\ \ [a,+\infty[\,,\ \ ]-\infty,a[$ ou $X =]a,+\infty[$; com $a \in \mathbb{R}$.

c) $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

2. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, com $X \subset Y$. Prove que

$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y \ .$$

3. Seja X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}$. Definamos o conjunto $X + Y = \{x + y : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Verifique as afirmações:

(a) $X + Y$ é limitado

(b) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$

(c) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

4. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios e arbitrários em $\mathbb{R}$. Então vale,

$$\sup X + \sup Y = \sup(X + Y) \ ,$$

com a convenção $\sup X = +\infty$ se X não é majorado superiormente.

Atenção: este resultado é importante no capítulo 6.

5. Sejam X e Y subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que: $x \leq y$, $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$. Mostre que:

a) $\sup X \leq \inf Y$.

b) $\sup X = \inf Y$ se e só se, $\forall \epsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \epsilon$. Sugestão: No ítem (b), use a Propriedade de Aproximação.

6. Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Suponha que X é limitado inferiormente e defina $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Verifique que o conjunto $-X$ é limitado superiormente e que $\sup(-X) = -\inf X$.

7. Seja X um subconjunto não vazio e limitado em $\mathbb{R}$. Dado $c \in \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, mostre que o conjunto $cX = \{cx \mid x \in X\}$ é limitado e

$$\sup(cX) = c \sup X \quad \text{e} \quad \inf(cX) = c \inf X \ .$$

Enuncie e verifique o que ocorre se $c < 0$.

8. Sejam X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$. Defina $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X \ \text{ e } \ y \in Y\}$. Mostre que $X \cdot Y$ é limitado e que

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \sup Y \quad \text{e} \quad \inf(X \cdot Y) = \inf X \inf Y \ .$$

9. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ para

(a) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(c) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx \,, \alpha \geq 1$.

(d) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

(e) $a_n = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n+1}}$.

(f) $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

(g) $a_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

(h) $a_n = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n)$.

10. Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Mostre que

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$

(b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

(c) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ e $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

Ainda mais, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

(d) $(\liminf x_n)(\liminf y_n) \leq \liminf(x_n y_n)$

(e) $\limsup(x_n y_n) \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$.

11. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots..$ é convergente a 2.

12. Calcule:

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$

(c) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$

13. Suponha que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$. Verifique que:

(a)
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n}{n} = a \ .$$

(b)
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n} = a \,, \qquad \text{se } a > 0 \text{ e } a_n > 0 \,, \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

Sugestão: Em (b) utilize (a).

14. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ para

$$(a) \quad a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}}{n} \qquad\qquad (b) \quad a_n = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+......+\sqrt[n]{2}}{n} .$$

Sugestão: Utilize o exercício 13.

15. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para $a_n = \frac{1}{(n\log^2 n)^p}$, $n \geq 2$, $p \in \mathbb{R}$.

16. Sejam $a > 0$ e $b > 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b) .$$

17. Calcule os limites da razão, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, e da raíz, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, ou pelo menos um deles, em cada um dos casos abaixo.

$$(a) \quad a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad\qquad (b) \quad a_n = n$$

$$(c) \quad a_n = \frac{1}{n^p} , p \in \mathbb{R} , \qquad\qquad (d) \quad a_n = \frac{1}{(\ln n)^p} .$$

18. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}, a_n > 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L .$$

Retorne ao exercício 17 e, se necessário, complete-o.

19. Mostre que se $\lim z_n = 0$ e (w_n) é limitada então, $\lim z_n w_n = 0$.

20. Prove que todo polinômio com coeficientes reais e de grau ímpar admite ao menos uma raíz real.

21. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, ..., n$. Seja z_0 arbitrário em $\mathbb{C}$. Mostre que existem coeficientes $b_0, ..., b_n$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + ... + b_n(z - z_0)^n , \forall z \in \mathbb{C} .$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.

22. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ um polinômio complexo, $n \geq 1$. Mostre:

(a) $|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - ... - |a_1||z| - |a_0|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |p(z)| = +\infty$.

(c) Existe um raio $R > 0$ tal que $|p(z)| > |p(0)| + 1000$ se $|z| > R$.

(d) A função $|p(z)|$, com $z \in \overline{D}(0; R)$, tem valor mínimo num ponto z_0.

(e) O ponto z_0 é o ponto de mínimo absoluto da função $|p(z)|$, $z \in \mathbb{C}$.

23. Mostre que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (parte do Teorema 3.11).

24. Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (parte do Teorema 3.11).

25. Mostre que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$ (Proposição 3.22).

26. Seja $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mostre que existe um único número real $y \geq 0$ tal que $y^n = x$. Dizemos que y é a raíz n-ésima de x: $y = \sqrt[n]{x}$.

27. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que X é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ se e somente se X é um subconjunto conexo de $\mathbb{C}$.

28. Mostre, a partir da definição, que o intervalo $[0,1]$ é compacto.

    Sugestão: Seja $\mathcal{C} = \{O_j : j \in J\}$ uma coleção de abertos em $\mathbb{R}$ tal que $[0,1] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Considere o conjunto

    $$A = \{\ x \in [0,1] :\ [0,x] \text{ é uma união finita de abertos na cobertura } \mathcal{C}\ \}\ .$$

    Mostre que A é não vazio e limitado superiormente, $\sup A = 1$ e $\sup A \in A$.

29. Seja (f_n) a *sequência de Fibonacci*, definida por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e

    $$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ , \quad \text{para todo } \ n\ \geq 0\ .$$

    (i) Prove que existe $\varphi = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Compute φ, denominada razão áurea.

    (ii) Mostre que

    $$\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ se } n \geq 0\ .$$

    (iii) Mostre que

    $$\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \text{ se } n \geq 1\ .$$

    (iv) Determine uma fórmula para f_n.

    Sugestão: Suponha válida a fórmula $f_n = \alpha A^n + \beta B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para específicos A, B, α e β. Então, ache A e B tais que a fórmula seja válida para quaisquer α e β. Por fim, determine α e β tais que $f_1 = f_2 = 1$.

30. Definamos $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$ para $m \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\lim_{n \to +\infty} \binom{m}{n} x^n = 0\ , \quad \forall x \in (-1,1)\ , \forall m \in \mathbb{R}\ .$$