1ª Lista de Exercícios, 28 (a) - ELIPSE - MAT 221 - CÁLCULO IV - IMEUSP

2º SEMESTRE de 2011

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Se $r = \langle x, y\rangle$, $r_1 = \langle x_1, y_1\rangle$, $r_2 = \langle x_2, y_2\rangle$, descreva o conjunto dos pontos r tais que,
$$|r - r_1| + |r - r_2| = R,\ R > |r_1 - r_2| \ .$$

Solução Antes de tudo, atentemos para a geometria para então simplificar a equação.

Chamemos s a reta por r_1 e r_2 (desenhe) e $C = \frac{r_1+r_2}{2}$ o ponto médio entre r_1 e r_2.

Trace por C a reta t, perpend. a s e mediatriz de $\overline{r_1r_2}$ (pontos equidistam de r_1 e r_2).

Só há 2 pontos em t com soma das distâncias a r_1 e r_2 igual a R (distam $\frac{R}{2}$ de r_1 ou r_2).

Eles são simétricos em relação à reta s, por r_1 e r_2.

Desenhando é fácil ver, por semelhança de triângulos, que se r é um ponto da figura ($|r-r_1|+|r-r_2| = R$), r', o seu simétrico em relação a s, satisfaz a mesma equação. Logo, a figura a determinar é simétrica em relação a s.

Para o mesmo r, o ponto r'', simétrico de r em relação a t (perpend. a $\overline{r_1r_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias a r_1 e r_2 é R.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares (t e s) e, um centro ($C = \frac{r_1+r_2}{2}$) e para desenhá-la basta faze-lo em um quadrante e então refletir em relação a t e s.

Seja x a reta t, y a reta s e adotemos $C = \frac{r_1+r_2}{2}$ como origem do sist. de coordenadas.

Nesse sistema: $r_1 = (\pm c, 0)$, $r_2 = (\mp c, 0)$. Suponhamos $c > 0$, $r_1 = (c, 0)$ e $r_2 = (-c, 0)$.

Assim, a equação adquire a forma:
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = R \ .$$

Agora, confio que vocês conseguem chegar ao formato padrão (vide próxima página):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \blacksquare$$

Vide abaixo uma solução em $\mathbb{C}$.

2. Consideremos o problema anterior na variável $z \in \mathbb{C}$:

$$(2.1) \qquad |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\,,\ 2a > |z_1 - z_2|\,,$$

com z_1 e z_2 fixos, e distintos, em $\mathbb{C}$ e a um real, $a > 0$. Temos,

$$\begin{cases} z - z_1 = z - \frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_1-z_2}{2} = w - \frac{z_1-z_2}{2} \\ z - z_2 = z - \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2} = w + \frac{z_1-z_2}{2} \end{cases}$$

Se $\gamma = \frac{z_1-z_2}{2}$, pela translação $z \mapsto w = z - \frac{z_1+z_2}{2}$ mudamos a equação (2.1) para

$$(2.2) \qquad |w - \gamma| + |w + \gamma| = 2a\ .$$

Como $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ tem módulo 1, a aplicação $\zeta \mapsto w = \frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta$ é uma rotação e mudamos (2.2) para

$$\left|\frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta - \gamma\right| + \left|\frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta + \gamma\right| = 2a\ ,$$

e pondo $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ em evidência, notando que $|\frac{\gamma}{|\gamma|}| = 1$, e simplificando,

$$\big|\,\zeta - |\gamma|\big| \ + \ \big|\,\zeta + |\gamma|\big| = 2a$$

Pondo $c = |\gamma| > 0$ temos (notemos que $c = |\gamma| = \frac{|z_1-z_2|}{2} < a$),

$$\big|\,\zeta - c\big|^2 = \big[\ 2a\ -\ \big|\,\zeta + c\big|\ \big]^2\ ,$$

e expressando ζ na forma $\zeta = u + iv$, $u\,, v \in \mathbb{R}$ (distinguindo de $z = x + iy$ para z),

$$(u-c)^2 + v^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} + (u+c)^2 + v^2\,,$$

$$-2cu = 4a^2 - 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} + 2cu\,,$$

$$4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} = 4a^2 + 4cu$$

e então, cancelando o 4 e elevando ao quadrado,

$$a^2u^2 + 2a^2cu + a^2c^2 + a^2v^2 = a^4 + 2a^2cu + c^2u^2 \,,$$

$$(a^2-c^2)u^2 + a^2v^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2-c^2) \;.$$

Assim, dividindo por $a^2(a^2-c^2)$,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2-c^2} = 1 \;.$$

Finalmente, como $a^2 - c^2 > 0$, pois $0 < c < a$, existe $b > 0$ tal que $a^2 - c^2 = b^2$ e portanto,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad \blacksquare$$

Tarefa: represente geometricamente as transformações realizadas.

Vide abaixo dúvidas sobre a Lista 2.

3 (b) $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$.

Verificação.

(i) Dados arbitrários $x \in X$ e $y \in Y$ é claro que $x + y \leq \sup X + \sup Y$. Então, por definição de sup,

$$\sup(X+Y) \leq \sup X + \sup Y \ .$$

(ii) Fixemos um arbitrário $x \in X$. Então, para todo $y \in Y$ temos

$$\sup(X+Y) \geq x + y \ .$$

Logo, $y \leq \sup(X+Y) - x$, para todo $y \in Y$. Então, pela definição de sup segue que $\sup Y \leq \sup(X+Y) - x$. Assim temos,

$$x \leq \sup(X+Y) - \sup Y \ , \forall \ x \in X \ .$$

Então, novamente pela definição de sup temos:

$$\sup X \leq \sup(X+Y) - \sup Y \ .$$

Donde, $\sup X + \sup Y \leq \sup(X+Y)$ ∎

8. Sejam $X, Y \subset (0, +\infty)$, com X e Y não vazios. Defina

$$X.Y = \{xy : x \in X \text{ e } y \in Y\} \ .$$

Mostre que

$$\sup(X.Y) = (\sup X)(\sup Y) \ .$$

Prova.

Pelo Axioma do Supremo, existem $\sup X > 0$ e $\sup Y > 0$.

É claro que $xy \leq (\sup X)(\sup Y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$. Donde segue,

$$\sup(XY) \leq (\sup X)(\sup Y) \ .$$

Fixado $x \in X$ temos $xy \leq \sup(XY)$, $\forall y \in Y$. Logo, $y \leq \frac{\sup(XY)}{x}$, $\forall y \in Y$. Assim, por definição de supremo,

$$\sup Y \leq \frac{\sup(XY)}{x} \ .$$

Donde segue,

$$x \leq \frac{\sup(XY)}{\sup Y} \ .$$

Então, como x é arbitrário em X, pela definição de supremo obtemos

$$\sup X \leq \frac{\sup(XY)}{\sup Y} \ .$$

Donde segue a tese ■

10. Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Mostremos

   (a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$.

Verificação. Como $(x_n + y_n)_n$ é limitada, existe $\gamma = \liminf(x_n + y_n) \in \mathbb{R}$, um valor de aderência. Logo, existe uma subsequência $(x_{n_k} + y_{n_k})_k$ tal que

$$x_{n_k} + y_{n_k} \longrightarrow \gamma \text{ se } k \to +\infty .$$

A subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é também uma sequência limitada e portanto admite uma subsequência $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a $\alpha \in \mathbb{R}$.

A subsequência $(x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}})_k$ converge a γ.

A subsequência $(y_{n_{k_j}})_j = (x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}})_j - (x_{n_{k_j}})_j$ converge a $\beta = \gamma - \alpha$.

Sendo α e β valores de aderência de (x_n) e (y_n), respectivamente, obtemos

$$\liminf x_n \leq \alpha \qquad \text{e} \qquad \liminf y_n \leq \beta .$$

Donde segue: $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \alpha + \beta = \gamma = \liminf(x_n + y_n)$ ■