$1^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo Diferencial e Integral IV - MAT220
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2011
21/09/2011

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Extra	
Total	

Nome : ____________________*GABARITO*____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

É necessário justificar todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Determine os valores máximo e mínimo de

   $(a)\quad \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|, \quad$ onde $|z|=3 \qquad\qquad (b)\quad |z+i|, \quad$ onde $|z-2|=1.$

   Resolução:

   Utilizemos o isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$, como espaços vetoriais reais.

   (a) Seja C a circunferência de centro na origem e raio 3.
   O ponto $(0,-3)\equiv -3i$ é o ponto em C mais distante de $i\equiv(0,1)$ e também o mais próximo de $-i\equiv(0,-1)$. Logo, o valor máximo pedido é

   $$\frac{|-3i-i|}{|-3i+i|}=\frac{4}{2}=2\ .$$

   O ponto $(0,3)\equiv 3i$ é o ponto em C mais próximo de $i\equiv(0,1)$ e também o mais distante de $-i\equiv(0,-1)$. Logo, o valor mínimo pedido é,

   $$\frac{|3i-i|}{|3i+i|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\quad .$$

   (b) Os pontos da circunferência C, centrada em $z_o=2$ e de raio 1, que são o mais próximo e o mais distante do ponto $-i$ são os pertencentes à intersecção da reta determinada pelos pontos $(0,-1)$ e $(2,0)$ com a circunferência C:

   $$2\pm\frac{2-(-i)}{|2-(-i)|}=2\pm\frac{2+i}{\sqrt{5}}\ .$$

   A distância mínima e máxima são, respectivamente,

$$\left|\left(2-\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)-(-i)\right|=\sqrt{6-2\sqrt{5}}\qquad,\qquad\left|\left(2+\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)-(-i)\right|=\sqrt{6+2\sqrt{5}}\ \blacksquare$$

Atenção Uma outra resolução para (a) é obtida analizando máximo/mínimo de

$$\frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = f(x,y) = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{10-2y}{10+2y} = \frac{5-y}{5+y}\,,$$

para $x^2+y^2=9$. Isto é, o máximo e o mínimo de $g(y)=\frac{5-y}{5+y}\,, y \in [-3,3]$.

2. Suponha que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Verifique que:

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1+...+a_n}{n} = a$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = a$, se $a > 0$ e $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Resolução.

   (a) Dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n > p \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$. Portanto,

$$\left| \frac{a_1 + ... + a_p + a_{p+1} + ... + a_n}{n} - a \right| =$$

$$= \left| \frac{a_1 + ... + a_p - pa}{n} + \frac{a_{p+1} - a + a_{p+2} - a + ...a_n - a}{n} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{j=1}^{p} |a_j - a|}{n} + \frac{(n-p)\epsilon}{n} \leq \frac{\sum_{j=1}^{p} |a_j - a|}{n} + \epsilon \ , \quad \forall n > p \ .$$

   Como p é fixo, podemos escolher $N > p$ tal que $n > N \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{p} |a_j - a|}{n} < \epsilon$. Logo,

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{a_1 + ... + a_p + a_{p+1} + ... + a_n}{n} - a \right| < 2\epsilon \ .$$

   Isto prova o ítem (a).

   (b) Imediato do item (a), notando que $\log a_n \to a$ se $n \to +\infty$, e escrevendo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log(a_1...a_n)^{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log(a_1...a_n)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log a_1 + ... + \log a_n}{n}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log a_1 + ... + \log a_n}{n}} = e^{\log a} = a \ \blacksquare$$

3. Determine se são convergentes ou não as séries:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\Big(1-\cos\frac{1}{n^2}\Big)$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3.5.7...(2n+1)}$.

Resoluções.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n+1}} \;\le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} \;< \infty$, pois $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ converge se $\lambda > 1$.

(b) **1ª solução:** Compare com $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, computando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-\cos\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2}\,.$$

2ª solução (do aluno Gabriel Salimene Zoha). Se $0 \le x \le 1$ temos,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + ... \ge 1 - \frac{x^2}{2!} + 0 + 0 + 0 + ... = 1 - \frac{x^2}{2!} \ge 0\,.$$

Logo, $1-\cos x \le \frac{x^2}{2}$ se $0 \le x \le 1$ e,

$$0 \;\le\; n^2\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right) \;\le\; \frac{1}{2n^2}\,,\;\; \forall n \ge 1\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

Pelo Critério da Comparação, a série converge.

(c) Teste da razão ■

4. Dadas as séries $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ e $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, seja a_n o termo geral de cada uma delas.

(a) Calcule $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, para cada uma delas.

(b) Calcule $\lim_{n\to+\infty} n\Big(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\Big)$, para cada uma delas.

(c) Qual destas séries converge? Qual diverge?

Resolução:

(a) Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ temos, para a primeira série,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \log n}{(n+1)\log(n+1)} = \Big(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\Big)\Big(\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)}\Big) \;=\; 1\,,$$

e para a segunda série,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(\log n)^2}{(n+1)[\log(n+1)]^2} = \Big(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)}\Big)\Big(\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)}\Big)^2 = 1\ .$$

(b) Para a primeira série devemos analisar o limite de,

$$k\left(1 - \frac{k\log\, k}{(k+1)\log\,(k+1)}\right) = \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)}\right]\ .$$

Para a segunda série devemos analisar o limite de,

$$k\left[1 - \frac{k\log^2 k}{(k+1)\log^2(k+1)}\right] = \frac{k}{k+1}\left[1 + k\frac{\log^2(k+1) - \log^2 k}{\log^2(k+1)}\right] = \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)}\frac{\log k(k+1)}{\log(k+1)}\right]\ .$$

Mas, $\frac{k}{k+1} \to 1$, $\lim \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x(x+1)}{\log(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x + \log(x+1)}{\log(x+1)} = 2$.
Logo, o limite obtido pelo teste de Raabe para ambas as séries é 1.

(c) Com os integrandos contínuos e decrescentes, vale o critério da integral:

$$\int_2^N \frac{1}{x\log x}dx = \log x|_2^N = (\log N - \log 2) \longrightarrow +\infty\,,\ \text{se } N \to +\infty$$

e, substituindo $y = \log x$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$,

$$\int_2^N \frac{1}{x\log^2 x}dx = \int_{\log 2}^{\log N} \frac{dy}{y^2} = \Big(-\frac{1}{y}\Big)\Big|_{\log 2}^{\log N} \longrightarrow \frac{1}{\log 2}\,,\ \text{se } N \to +\infty\ .$$

Logo, a primeira série diverge e a segunda série converge ■

5. Dada a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}\ , \quad -1<\alpha<0\,,$$

determine se ela é divergente, convergente, condicionalmente convergente, ou absolutamente convergente.

Atenção: No excelente livro "Exercícios Propostos e Resolvidos de Sequências e Séries Numéricas e de Funções" do Prof. Boulos há um engano relacionado a tal exercício. Encontre-o ! A prova sugerida no livro do Prof Guidorizzi é distinta desta e utiliza um lema não intuitivo e não simples. A prova abaixo é auto-suficiente.

Resolução:

- Pondo $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ e aplicando o Critério de Raabe temos,

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big|\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\frac{|\alpha-n|}{n+1}\Big)$$

e, notando que $|\alpha-n| = n-\alpha$ se n é suficientemente grande,

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big|\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\frac{n-\alpha}{n+1}\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\alpha+1}{n+1} = \alpha+1\ .$$

Como $\alpha+1<1$, pelo Crit. de Raabe $\sum^{+\infty}\Big|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\Big|$ **diverge**.

- Visto que $-1<\alpha<0$ temos $-\alpha<1$ e concluímos:

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1\,,$$

e a sequência $(|a_n|)$ decresce e existe $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = L$. Mostremos que $L=0$. Fixo $n\in\mathbb{N}$, $n>\alpha$, se $\beta = 1+\alpha$ temos $0<\beta<1$ e, para $p\in\mathbb{N}$ arbitrário,

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{n+1-(1+\alpha)}{n+1} = 1-\frac{\beta}{n+1}\,,$$

$$\Big|\frac{a_{n+p}}{a_n}\Big| = \Big|\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}}\,\frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}}....\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = (1-\frac{\beta}{n+p})(1-\frac{\beta}{n+p-1})....(1-\frac{\beta}{n+1})\,,$$

$$(*)\qquad \Big|\frac{a_{n+p}}{a_n}\Big| \le (1-\frac{\beta}{n+p})^p \le (1-\frac{\beta}{n+p})^{p+n}(1-\frac{\beta}{n+p})^{-n}\ .$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$, $\forall x$, com o limite em (*) para $p\to+\infty$ temos

$$0 \le \frac{L}{a_n} \le e^{-\beta}\,,\quad \forall n>\alpha\,,\ n\in\mathbb{N}\ .$$

Desta forma temos, $0\le e^{\beta}L \le \lim a_n = L$, o que implica $L=0$ pois $e^{\beta}>1$. Logo, pelo critério de Leibnitz, $\sum^{+\infty}(-1)^n|a_n| = \sum^{+\infty} a_n$ é **convergente** ■

Extra. Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + ... a_n z^n$ um polinômio complexo e de grau $n \geq 1$ (isto é, $a_n \neq 0$). Mostre que :

(a) $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.

(b) Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z_0)| \leq |P(z)|, \forall z \in \mathbb{C}$.

(c) Podemos assumir, sem perda de generalidade, $z_0 = 0$.

Resolução. Provado em sala $\blacksquare$