MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV (IFUSP)
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2011

7 LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Determine a expansão de Laurent da função dada em torno de cada uma de suas singularidades, especificando o anel no qual ela é válida.

   (a) $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}$
   (b) $f(z) = -1 - \frac{1}{z} + e^{1/z}$
   (c) $f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2(z-i)}$
   (d) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)}$
   (e) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$
   (f) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$
   (g) $f(z) = \cos\frac{1}{z}$
   (h) $f(z) = \frac{z^5}{(z^2-2)^2}$

2. Uma função holomorfa num disco em torno de um polo é a soma de duas funções, uma racional e outra holomorfa.

3. Dê uma função com um polo de ordem 1 em $z = 2$ e um polo de ordem 7 em $z = \sqrt{2}i$.

4. Classifique a singularidade 0 de cada uma das funções:

   (a) $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$
   (b) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$
   (c) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3}$
   (d) $f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$
   (e) $f(z) = \frac{1}{z^8 - z}$
   (f) $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}$.

5. Determine a ordem do polo de f em a e calcule $\text{res}(f; a)$.

   (a) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, $a = 0$
   (b) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^{n+1}}$, $a = 0$
   (c) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$, $a = 0$
   (d) $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^5}$, $a = 1$
   (e) $f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.
   (f) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$, $a = 0$.
   (g) $f(z) = \frac{1 - e^{3z}}{z^4}$, $a = 0$.
   (h) $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

6. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - cos x}{x^2} dx$.

7. A transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$, de $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Considere $\xi \in \mathbb{R}$.

   (a) Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx$ [isto é, $\hat{f}(\xi)$].
   (b) Qual o valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx$?

8. Mostre que $\forall \xi \in \mathbb{C}$ vale:

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x\xi} dx \ .$$

9. Compute, utilizando resíduos, as Integrais de Fresnel:

$$(a) \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \, .$$

Sugestão: Fixado $R > 0$, integre e^{-z^2} sobre a fronteira do setor circular

$$\left\{ z = re^{i\theta} : 0 \leq r \leq R \, , 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\} \ .$$

10. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

11. Compute, utilizando resíduos, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

12. Compute, utilizando resíduos, $\int_0^{\pi} \frac{a}{a+\cos t} dx$, $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

13. Compute, utilizando resíduos,
    (a) V.P.$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$
    (b) V.P.$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ e V.P.$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
    (c) O que pode ser dito de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$?
    (d) O que pode ser dito de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$?

14. Utilize resíduos para calcular
    (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+5)} dx$
    (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$
    (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$
    (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx$
    (e) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$
    (f) $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$
    (g) $\int_0^{2\pi} (2\cos^3 t + 4\sin^5 t) dt$
    (h) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx$, onde $a > 0$.

15. Seja f holomorfa em $\Omega \ni 0$ e ainda:$f(0) = 0$ e 0 é o único zero de f em Ω. Seja g também holomorfa em Ω. Então, f divide g [i.e., temos $g = hf$, com h holomorfa] se e somente se:

$$\text{res}\left(\varphi \frac{g}{f} \ 0\right) = 0 \quad \text{para toda função holomorfa } \varphi \text{ em } \Omega \ .$$