MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

Unidade: IFUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Segundo Semestre de 2011

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

P/ entregar: exercícios 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23 e 24, numerados em negrito.

1. Mostre que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e quaisquer que sejam $n, N \in \mathbb{N}$, com $N \geq n$, temos

$$\sum_{j=n}^{N} z^j = \frac{z^n - z^{n+N+1}}{1-z} \ .$$

2. Verifique as fórmulas abaixo.

(a) $\sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $\sum\limits_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. Mostre que $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m} z_j w_k = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} z_j w_k = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} z_j\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{m} w_k\right)$.

4. Sejam $(z_j)_{1\leq j\leq n}$ e $(w_k)_{1\leq k\leq n}$ duas sequências finitas em $\mathbb{C}$. Verifique

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right) - \sum_{1\leq j<k\leq n} |z_j w_k - z_k w_j|^2 \ .$$

Utilizando (a), deduza a desigualdade de Cauchy (vide Exercício 2.8).

5. Verifique a Propriedade Telescópica:

$$\sum_{k=m}^{n} (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_m.$$

6. Calcule, aplicando a propriedade telescópica,

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} [\,(k+1)^3 - k^3\,]$.

(b) $\sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)}$

(c) $\sum\limits_{j=100}^{500} \frac{1}{j(j+1)(j+2)}$

Sugestão para (c): verique que $\frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j(j+1)} - \frac{1}{(j+1)(j+2)}\right)$

7. Calcule a soma da série dada.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \pi^{-k}$.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$.

(d) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

8. Calcule a soma da série dada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\alpha^n$, $0 < \alpha < 1$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)^2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)....(n+p)}$, onde $p \geq 1$ é um natural fixo.

9. Determine a convergência ou divergência das séries (v. Guidorizzi, Vol. 4).

(a) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

(b) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \log(k)}$.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{1+k^4}$

(d) $\sum\limits_{p=4}^{+\infty} \log \frac{2p}{p+1}$

(e) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \frac{n^2-3n+1}{n^2+4}$.

10. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{4k^3-k+10}$.

(b) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3}$.

(c) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}{k^2+7k+11}$.

(d) $\sum\limits_{k=20}^{+\infty} \frac{2^k}{k^5}$.

(e) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$

(f) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^{10}}$

(g) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$.

11. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$.

(c) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$.

(d) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{n^3+4}{2^n}$

12. Estude, com relação à convergência ou divergência:

(a) $\sum\limits_{k=27}^{+\infty} \frac{1}{k \log k \ \log(\log k)}$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1}$

(c) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^3 \ \log(k)}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}}$

(e) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{k^2+5}{k^2 \ (\log k)^3}$

13. Seja $(z_n) \subset \mathbb{C}^*$. Mostre que

$$\text{se } \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|}\right) \in (-\infty, +\infty) \quad \text{então} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|} = 1 \ .$$

14. Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

(a) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log n}$, $\alpha > 0$.

(b) $\sum_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^{\alpha}}$, $\alpha > 1$

(c) $\sum_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$

(d) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n (\log n)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$

(e) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

15. Dadas as séries $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ e $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, seja a_n o termo geral de cada uma delas. Verifique as afirmações abaixo.

(a) $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ (Teste da razão).

(b) $\lim_{n \to +\infty} n\left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|\right) = 1$ (Critério de Raabe).

(c) A primeira diverge e a segunda converge.

16. Determine os valores de $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tais que são convergentes as séries:

(a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\log n)^{\beta}}$

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^{\beta}}{n^{\alpha}}$.

17. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Consideremos a sequência $(|a_n|)$, $n \geq 1$, dos coeficientes binomiais $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}$. Verifique as afirmações abaixo.

(a) Se $-1 < \alpha$ então $\lim a_n = 0$ e $(|a_n|)_{n \geq n_0}$, $n_0 > \alpha$, decresce.

(b) Se $\alpha < -1$, α inteiro ou não, então $\lim a_n \neq 0$.

(c) Se $\alpha < -1$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ diverge.

18. Seja $0 < \alpha < 1$. Então,

(a) A série (não alternada) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ é convergente.

(b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ é alternada e convergente.

19. Se $-1 < \alpha < 0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ converge condicionalmente.

20. Mostre que $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, satisfaz,

(a) Diverge, se $|x| > 1$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(b) Converge absolutamente, se $|x| < 1$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(c) Se $\alpha > 0$, converge (absolutamente) se somente se $x \in [-1, 1]$.

(d) Se $-1 < \alpha < 0$, converge se somente se $x \in (-1, 1]$ e converge condicionalmente se $x = 1$.

(e) Se $\alpha \leq -1$, converge se e somente se $x \in (-1, 1)$.

21. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ é convergente ou divergente? Justifique.

22. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n + n^2}{n^4}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1 - \cos \frac{1}{n^2})$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$

(d) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5 + 3n + 1}}{n^3 (\log n)^2}$

(e) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(\log n)^3}{n^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n \sqrt[3]{n^2 + 3}}\right)$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 3} - 1\right)$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 3}\right)$.

23. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{1 + 3^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} (1 + \frac{1}{n})^n$

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \frac{n!}{n^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3.5.7.\ldots.(2n+1)}$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.4.6.\ldots.(2n)}{n^n}$.

24. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(b) $\sum_{n \geq p}^{+\infty} \frac{n^{n-p}}{n!}$, com p fixo em $\mathbb{N}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5.\ldots.(2n+1)}{4.6.8.\ldots.(2n+4)}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.(2n)}}$.

25. Nos exercícios abaixo determine se a série $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n$ é convergente ou divergente. No caso de convergência, verifique se a convergência é absoluta ou condicional.

    (a) $a_n = \frac{\sin(2n+1)}{n^{20}}$

    (b) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n-3}{10n+4}$

    (c) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\log n}$

    (d) $a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}$

    (e) $a_n = (-1)^n \left[\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....(2n)} \right]^3$

    (f) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\log(e^n + e^{-n})}$.

26. Determine $z \in \mathbb{C}$ para que a série dada seja convergente:

    (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} z^{2n}$

    (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

    (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n z^n$

    (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

    (e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$

    (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

    (g) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{z^n}{\log n}$

    (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1.3.5......(2n+1)}$.

    (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1) z^n}{n!}$.