MAT 220 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Unidade: IFUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2011

1 LISTA DE EXERCÍCIOS

P/ entregar: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 21, 24, 26, 28, 36, 38, 44, 45 e 46

1. (Fórmula Binomial) Mostre que dados $z, w \in \mathbb{C}$ então

$$(z+w)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} z^p\, w^{n-p}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ .$$

Sugestão: Por indução. Lembrete: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ e $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $p = 0, 1, ..., n$.

2. Escreva na forma binômica ($z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$) os números complexos:

(a) $(4-i) + i - (6+3i)i$ $\quad (b)$ $\dfrac{5}{-3+4i}$ $\quad (c)$ $\dfrac{3-i}{4+5i}$.

(d) $(1+2i)^3$ $\quad (e)$ $(3+2i)(\overline{1-4i})$ $\quad (f)$ $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$

(g) $\overline{(4-i)}\cdot\overline{(1-4i)}$ $\quad (h)$ $(7+4i)(2-3i)+(6-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{5})$.

3. Se $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), determine as partes real e imaginária de:

(a) z^4 $\quad (b)$ $\dfrac{1}{z}$ $\quad (c)$ $\dfrac{z-1}{z+1}$ $\quad (d)$ $\dfrac{1}{z^2}$.

4. Mostre que $\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ e $\left(\frac{\pm 1 i \pm\sqrt{3}}{2}\right)^6 = -1$.

5. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o anel das matrizes quadradas de ordem 2 com coeficientes reais, munido das operações usuais de adição e multiplicação.

Considere $\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Mostre que a função

$$\varphi : a + ib = z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$$

é isomorfismo de corpos. Isto é, φ é bijetora

$$\varphi(z+w) = \varphi(z) + \varphi(w) \qquad\qquad \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w) \ .$$

Dizemos que φ é uma bijeção que preserva adição e multiplicação.

6. Compute $|z|$ nos seguintes casos:

$$(a) \quad z = -2i(3+i)(2+4i)(1+i) \qquad\qquad (b) \quad z = \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)} \ .$$

7. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ mostre que:

   (a) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$

   (b) $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$

   (c) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (lei do paralelogramo)

   Sugestão: $|z \pm w|^2 = (z \pm w)\overline{(z \pm w)} = (z \pm w)(\overline{z} \pm \overline{w}) = ...$ etc.

8. (A desigualdade de Cauchy) Dadas duas sequências de n números complexos $(z_k)_{1 \le k \le n}$ e $(w_k)_{1 \le k \le n}$, prove:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} \Big|^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \Big) \ .$$

   Sugestão: Faça primeiro o caso $n = 2$ (o caso $n = 1$ é trivial).

9. (A desigualdade de Cauchy) Dadas duas sequências de m números complexos $(a_k)_{1 \le k \le n}$ e $(b_k)_{1 \le k \le n}$, prove a desigualdade

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \Big) \ .$$

   Sugestão: Aplique o Exercício 8 com $z_k = |a_k|$ e $w_k = |b_k|$, $1 \le k \le n$.

10. Calcule i^2, i^3, i^4, i^5. Mostre que se $m \in \mathbb{N}^*$ e q e r são o quociente e o resto da divisão inteira de m por 4 (isto é, $m = 4q + r, \quad 0 \le r \le 3$), então $i^m = i^r$. Compute também:

$$(a) \ i^{20} \qquad (b) \ i^{1041} \qquad (c) \ i^{72} \qquad (d) \ (1+i)^{12} \qquad (e) \ 1 + i + i^2 + ... + i^{2011} \ .$$

11. Determine z sabendo que $|z| = |1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right|$.

12. Desenhe a região do plano determinada por

$$(a) \ \left|\frac{z+1}{z-1}\right| \le 1 \qquad (b) \ \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0 \qquad (c) \ |z+1| = 2|z| \ .$$

13. Se $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ calcule:

$$(a) \ z^6 \qquad (b) \ 1 + z + z^2 + ... + z^{47} \ .$$

14. Determine e represente graficamente:

    (a) as raízes quadradas de 1.

    (b) as raízes cúbicas de 1.

    (c) as raízes quartas de 1.

15. Ache todos os valores de:

$(a)\ (2+2i)^{3/2}$ $\qquad$ $(b)\ (-1+i\sqrt{3})^{1/3}$ $\qquad$ $(c)\ (-1)^{-3/4}$.

16. Sob que condições se tem $|z+w| = |z-w|$? Interprete geometricamente.

17. Sendo $m \in \mathbb{Z}$, que valores pode ter $i^m + i^{-m}$?

18. Determine os valores máximo e mínimo de:

$(a)\ \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|$, onde $|z| = 3$ $\qquad$ $(b)\ |z+i|$, onde $|z-2| = 1$.

19. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = 1$ ou $|w| = 1$. Mostere que $\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = 1$.

20. Determine os valores $a \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{a+i}{1+ai} \in \mathbb{R}$.

21. Determine os valores $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{2+\alpha i}{1+i}$ é imaginário puro.

22. Mostre que $|z| = 1$ se e só se $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

23. Se $z + \frac{1}{z} = 1$, calcule $|z|$.

24. Sendo $a \in \mathbb{R}$, determine $\left|\frac{1-ai}{1+ai}\right|$.

25. Prove e interprete geometricamente a chamada "Lei do Paralelogramo":

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2 , \ \forall z, w \in \mathbb{C} .$$

26. Desenhe a região do plano determinado pelas relações:

$(a)\ \mathrm{Re}(z) = 1$ $\qquad$ $(b)\ \mathrm{Im}(z) = -1$ $\qquad$ $(c)\ 1 \leq \mathrm{Im}(z) < 3$.

$(d)\ -1 < \mathrm{Re}(z) \leq 2$ $\qquad$ $(e)\ \mathrm{Re}(z) = Im(z)$ $\qquad$ $(f)\ \mathrm{Re}(z^2) = 1$.

27. (a) Mostre que $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{z}{|z|^2}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$.

(b) Utilize (a) e a observação "$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \overline{w}$" para desenhar o conjunto,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\}.$$

28. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$ e $a \in \mathbb{R}_+^*$, desenhe os subconjuntos:

(a) $\{z : |z-z_1| + |z-z_2| = 2a\}$, com a condição $2a > |z_1 - z_2|$.

(b) $\{z : |z-z_1| - |z-z_2| = 2a\}$, com a condição $2a < |z_1 - z_2|$.

(c) $\{z : |z-z_1| = a\}$.

29. Dado $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, desenhe o conjunto $P := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z - z_1|}{\mathrm{Im}(z)} = 1 \right\}$.

30. Dados z_1 e z_2 e a como no Exercício 28 considere o conjunto

$$X := \{ z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z - z_1| + |z - z_2| \leq r \}, \text{ onde } r = 2a \ .$$

(a) Mostre que se $r = |z_1 - z_2|$, X é um segmento fechado e determine X.

(b) Desenhe o conjunto X nos casos $r > |z_1 - z_2|$ e $r < |z_1 - z_2|$.

(c) Como ficam as questões (a) e (b) acima (e suas respostas) se trocarmos na definição de X o símbolo $\leq$ por $<$?

31. Compute $\frac{(\alpha+i)^4 + \alpha i(1+i)}{(1+i)^4 + 3i}$, onde α é a determinação de $\sqrt[3]{-8i}$ cujo afixo pertence ao quarto (4) quadrante.

32. Dado $m \in \mathbb{N}^*$, calcule o produto de todas as determinações de $I := \left(\sum_{k=0}^{m} i^k \right)^{\frac{1}{m}}$. Discuta o resultado segundo m.

33. Fixada a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e utilizando o isomorfismo $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{C}$ definido no Exercício 5, mostre que um número complexo z é identificado com o produto da matriz que representa a homotetia de coeficiente $|z|$ sobre $\mathbb{R}^2$,

$$T_{|z|} = \begin{bmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{bmatrix} = |z| I \ , \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pela matriz representante da rotação pelo ângulo θ no sentido anti-horário.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \theta = \arg(z) \ .$$

Isto é,

$$z \equiv T_{|z|} \circ R_\theta = |z| \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \theta = \arg(z) \ .$$

34. Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Verifique:

a) Existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\{z : z^m = 1\} = \{1, w, w^2, ..., w^{m-1}\}$. Dizemos que w é um gerador do conjunto das m raízes m-ésimas da unidade.

b) Se z_1 é uma raiz m-ésima qualquer de $z \in \mathbb{C}^*$ e w é como no ítem (a) então $\{z_1, z_1 w, ..., z_1 w^{m-1}\}$ é o conjunto das m raízes m-ésimas de z.

c) O complexo w no ítem (a) não é único.

35. Resolva a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$.

36. Resolva os sistemas lineares em z e w:

$$a)\ \begin{cases} z + iw &= 1 \\ iz + w &= 2i - 1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} iz + (1+i)w &= 1 \\ (1+i)\overline{z} - (6+i)\overline{w} &= -4 - 8i\ . \end{cases}$$

37. Resolva as equações:

$$(a)\ x^6 + ix^3 = 0 \qquad (b)\ x^{10} + 64x^2 = 0 \qquad (c)\ 2x^6 + \frac{i}{2}x^2 = 0 \qquad (d)\ x^6 + 3x^3 + 2 = 0\ .$$

38. Dados $a, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}^*$, prove que as raízes da equação em z,

$$(z - b_1)^m + a(z - b_2)^m = 0$$

estão sobre uma circunferência ou uma reta e resolva a equação.

39. (a) Determine a relação entre $a, b \in \mathbb{R}$ para que sejam todas reais as raízes de

$$(*) \qquad \left(\frac{i - z}{i + z}\right)^m = a + ib \qquad (m \in \mathbb{N}^*)\ .$$

(b) Supondo verificada a relação encontrada em (a), resolva a equação (*) admitindo conhecido o argumento θ dio número complexo $a + bi$.

40. (a) Mostre que são reais todas as raízes da equação

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^m = \frac{1 + ai}{1 - ai}\ , \quad (a \in \mathbb{R}\,, m \in \mathbb{N}^*)\ .$$

(b) Compute as raízes da equação no item acima no caso $a = 1$ e $m = 3$.

41. Compute as somas (supondo $a\,, r \in \mathbb{R}$):

$$C_m := \sum_{n=0}^{m-1} \cos(a + rn) \quad \text{e} \quad S_m := \sum_{n=0}^{m-1} \sin(a + rn)\,,$$

(a) Multiplicando as dadas expressões por $2\sin\left(\frac{r}{2}\right)$.

(b) Considerando o número complexo $C_m + iS_m$.

42. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, com $|z| \le 1$, $|w| \le 1$ e $z + w = 1$. Mostre que $|z + w^2| \le 1$.

43. Dados $a \in (0, +\infty)$, $c \in [0, +\infty)$ e $b \in \mathbb{C}$ mostre que a equação

$$az\overline{z} + bz + \overline{bz} + c = 0\,,$$

representa uma circunferência se $ac < b\overline{b}$.

44. Mostre que a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ pode ser escrita na forma

$$z^2 + \overline{z}^2 = 2 \; .$$

45. Seja $z = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^2$ e k um número natural par, $k \geq 2$. Mostre,

$$\textit{(Estermann 1956)} \qquad \mathrm{Re}[z^k] \; < \; 0 \; < \; \mathrm{Im}[z^k] \; .$$

Atenção: A desigualdade acima é também válida se k é ímpar.

46. (Raízes Quadradas) Determine as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

$$z^2 = a + ib \, , \qquad \text{onde } a, b \in \mathbb{R} \; .$$

Dica: Determine as partes real e imaginária de z e uma fórmula para z.