**Prova Substitutiva de MAT0220 - Cálculo IV - IFUSP**
**$2^{\underline{o}}$ semestre de 2009 - 18/12/2009**
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

| Q | N |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 11 | |
| 12 | |
| Total | |

Nome : ___________________GABARITO___________________

$N^{\underline{o}}$USP : ________________________________________________

**JUSTIFIQUE TODAS AS PASSAGENS**

**BOA SORTE E BOAS FESTAS**

1. Dadas as séries $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\ \log\ n}$ e $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\ (\log\ n)^2}$, seja $a_n$ o termo geral de cada uma delas.
   Verifique:
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ (Teste da Razão).
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n \left(1 - \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = 1$ (Critério de Raabe).
   (c) A primeira série acima diverge e a segunda série converge.

**Resolução:**

(a) Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ temos, para a primeira série,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{(n+1)\log(n+1)} = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)}\right) = 1\,,$$

e para a segunda série,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(\log n)^2}{(n+1)[\log(n+1)]^2} = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)}\right)^2 = 1\ .$$

(b) Para a primeira série devemos analisar o limite de,

$$k\left(1-\frac{k\log\,k}{(k+1)\log\,(k+1)}\right) = \frac{k}{k+1}\left[1+\frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)}\right]\ .$$

Para a segunda série devemos analisar o limite de,

$$k\left[1-\tfrac{k\log^2 k}{(k+1)\log^2(k+1)}\right] = \tfrac{k}{k+1}\left[1+k\tfrac{\log^2(k+1)-\log^2 k}{\log^2(k+1)}\right] = \tfrac{k}{k+1}\left[1+\tfrac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)}\tfrac{\log k(k+1)}{\log(k+1)}\right]\ .$$

Mas, $\frac{k}{k+1}\to 1$, $\lim \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)} = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x(x+1)}{\log(x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x+\log(x+1)}{\log(x+1)} = 2$.

Logo, o limite obtido pelo teste de Raabe para ambas as séries é 1.

(c) Com os integrandos contínuos e decrescentes, vale o critério da integral:

$$\int_2^N \frac{1}{x\log x}dx = \log x|_2^N = (\log N - \log 2) \longrightarrow +\infty\,,\ \text{se } N\to+\infty$$

e, substituindo $y=\log x$ e $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$,

$$\int_2^N \frac{1}{x\log^2 x}dx = \int_{\log 2}^{\log N}\frac{dy}{y^2} = \Big(-\frac{1}{y}\Big)\Big|_{\log 2}^{\log N} \longrightarrow \frac{1}{\log 2}\,,\ \text{se } N\to+\infty\ .$$

Logo, a primeira série diverge e a segunda série converge ■

2. A série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $-1<\alpha<0$,

(0,5) (a) não é absolutamente convergente.

(1,5) (b) é convergente.

**Obs:** A série dada é então dita condicionalmente convergente

**Atenção:** O ítem (b) é o que pedi ao longo do curso que analizassem no livro 'Exercícios Propostos e Resolvidos de Sequências e Séries Numéricas e de Funções' do Prof. Boulos, pois no livro há um erro. A prova sugerida no livro do Prof Guidorizzi, constante no gabarito da prova P1, está correta mas "pouco clara" pois utiliza um lema não intuitivo e não simples. A prova abaixo é auto-suficiente.

**Resolução:**

(a) Pondo $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ e aplicando o Critério de Raabe temos,

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big|\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\frac{|\alpha-n|}{n+1}\Big)$$

e, notando que $|\alpha-n| = n-\alpha$ se $n$ é suficientemente grande,

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big|\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\frac{n-\alpha}{n+1}\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\alpha+1}{n+1} = \alpha+1\ .$$

Como $\alpha+1<1$, pelo Crit. de Raabe $\sum\Big|\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\Big|$ diverge.

(b) Visto que $-1<\alpha<0$ temos $-\alpha<1$ e concluímos:

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1\,,$$

e a sequência $(|a_n|)$ decresce e existe $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = L$. Mostremos que $L=0$. Fixo $n\in\mathbb{N}$, $n>\alpha$, se $\beta = 1+\alpha$ temos $0<\beta<1$ e, para $p\in\mathbb{N}$ arbitrário,

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{n+1-(1+\alpha)}{n+1} = 1-\frac{\beta}{n+1}\,,$$

$$\Big|\frac{a_{n+p}}{a_n}\Big| = \Big|\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}}\frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}}....\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = (1-\frac{\beta}{n+p})(1-\frac{\beta}{n+p-1})....(1-\frac{\beta}{n+1})\,,$$

$$(*)\qquad \Big|\frac{a_{n+p}}{a_n}\Big| \le (1-\frac{\beta}{n+p})^p \le (1-\frac{\beta}{n+p})^{p+n}(1-\frac{\beta}{n+p})^{-n}\ .$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$, $\forall x$, com o limite em (*) para $p\to+\infty$ temos

$$0\le\frac{L}{a_n}\le e^{-\beta}\,,\quad \forall n>\alpha\,,\ n\in\mathbb{N}\ .$$

Desta forma temos, $0\le e^{\beta}L\le \lim a_n = L$, o que implica $L=0$ pois $e^{\beta}>1$.
Logo, pelo critério de Leibnitz, $\sum^{+\infty}(-1)^n|a_n| = \sum^{+\infty} a_n$ é convergente ■

3. Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \ \ \alpha \in I\!R\backslash I\!N$. Determine:

(0,5) (a) Seu raio de convergência.

(0,5) (b) Seu domínio de convergência se $\alpha > 0$.

(1,0) (c) Seu domínio de convergência se $\alpha \leq -1$.

**Resolução:** Lembrete: $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$.

(a) Pela fórmula de Hadamard a série tem raio de convergência $\rho$ satisfazendo,

$$\rho^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1 \ ,$$

converge absolutamente em $(-1, +1)$ e diverge se $|x| > 1$; $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(b) Se $\alpha > 0$ temos, se $n > \alpha$, $|\alpha - n| = n - \alpha$ e, pelo Critério de Raabe,

$$n\Big(1 - |\tfrac{a_{n+1}}{a_n}|\Big) \ = n\Big(1 - \left|\tfrac{\alpha-n}{n+1}\right|\Big) = n\Big(1 - \tfrac{n-\alpha}{n+1}\Big) = n\tfrac{\alpha+1}{n+1} \ \longrightarrow \alpha + 1 > 1\,,$$

e a série dada converge absolutamente em $x = \pm 1$ e em todo $x$ em $[-1, +1]$, que é então o intervalo de convergência.

(c) Se $\alpha \leq -1$, os termos gerais das séries binomiais nos extremos $x = \pm 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n}$$

não tendem a zero pois,

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = \frac{n - \alpha}{n+1} \geq 1 \ ,$$

e então, a série binomial, neste caso, diverge nos extremos $x = \pm 1$ ■

4. Compute $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\text{sen}^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}\,dz$, onde $\gamma(t)=e^{it},\ t\in[0,2\pi]$.

**Resolução:**

Pela fórmula integral de Cauchy,

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,,$$

temos,

$$\oint_\gamma \frac{\sin^6 z}{(z-\frac{\pi}{6})^3}\,dz \;=\; \frac{2\pi i}{2!}f''(\frac{\pi}{6})\,,\quad f(z)=\sin^6 z\ .$$

Mas,

$$\begin{cases} f'(z) & = 6\sin^5 z\cos z \\ f''(z) & = 30\sin^4 z\cos^2 z-6\sin^6 z \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & = \frac{1}{2} \\ \cos(\frac{\pi}{6}) & = \frac{\sqrt{3}}{2}\ . \end{cases}$$

Logo,

$$f''(\frac{\pi}{6})=30\frac{1}{2^4}\frac{3}{2^2}-6\frac{1}{2^5}\frac{1}{2}=\frac{84}{64}=\frac{21}{16}\,,$$

e,

$$\oint_\gamma \frac{\sin^6 z}{(z-\frac{\pi}{6})^3}\,dz \;=\; \frac{21}{16}\pi i \quad \blacksquare$$

5. Compute $\displaystyle\oint\limits_\gamma \frac{z^8}{z^3+z^2+z+1}\,dz$, com $\gamma(t) = -1 + e^{it}\,, t \in [0, 2\pi]$.

**Resolução:**

Temos $z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(z^2+1)$, sendo que as raízes de $z^2+1$, $i$ e $-i$, não pertencem ao interior da região limitada com fronteira descrita por $\gamma$. Logo, pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int\limits_\gamma \frac{z^8}{z^3+z^2+z+1}\,dz = \int\limits_\gamma \frac{z^8/(z^2+1)}{z+1}\,dz \;= 2\pi i f(-1)\,, \quad f(z) = z^8/(z^2+1)\ ,$$

e

$$\int\limits_\gamma \frac{z^8}{z^3+z^2+z+1}\,dz = \pi i \quad \blacksquare$$

6. Seja $\Omega$ um aberto em $\mathbb{C}$. Verifique (sem utilizar o Princípio do Módulo Máximo):
   (a) Se $z_0 \in \Omega$ é um ponto de máximo local de $|f|$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então $f'(z_0) = 0$.
   (b) Mostre, com um exemplo, que não vale resultado análogo se $z_0$ é ponto de mínimo local de $|f|$. Isto é, exiba uma função $f$ holomorfa tal que $|f|$ tem um ponto de mínimo local em algum $z_0$ porém, $f'(z_0) \neq 0$.

**Atenção:** A intenção deste exercício é indicar uma outra "fácil" prova para o Princípio do Módulo Máximo. Na prova, por um lapso, não havia o pedido para a não utilização do Princípio do Módulo Máximo. A solução abaixo que não usa tal princípio, combinada com parte do mostrado na resolução da Questão 5 da prova P3 fornece uma nova prova do Princípio do Módulo Máximo (verifique).

**Resolução:**

(a) **Primeira prova, utilizando o Princípio do Módulo Máximo:**
Seja $O$ a componente conexa, aberta, de $\Omega$ a qual $z_0$ pertence. Então, $z_0$ é também ponto de máximo local de $f$ restrita a $O$ e, pelo Princípio do Módulo Máximo, $f$ é constante em $O$. Logo, $f'$ é nula em $O$ e $f'(z_0) = 0$.

**Segunda prova, não utilizando o Princípio do Módulo Máximo:**

Se $|f(z_0)| = 0$ então é óbvio que $f(z) = 0\,, \forall z \in \Omega$, e $f'(z) = 0\,, \forall z$.

Se $f(z_0) = u_0 + iv_0 \neq 0$, com $f = u + iv$, $u =$Re$(f)$ e $v =$Im$(f)$, então
$$u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = |f(z)|^2\,, \quad \text{onde } x + iy = z\,,$$
tem máximo local em $(x_0, y_0)\,,\ x_0 + iy_0 = z_0$. Logo, derivando parcialmente,
$$\begin{cases} u_0 u_x(x_0,y_0) + v_0 v_x(x_0,y_0) &= 0 \\ u_0 u_y(x_0,y_0) + v_0 v_y(x_0,y_0) &= 0\,, \end{cases}$$
e, pelas equações de Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x$ e $v_y = u_x$ e portanto
$$(S) \quad \begin{cases} u_0 u_x(x_0,y_0) + v_0 v_x(x_0,y_0) &= 0 \\ v_0 u_x(x_0,y_0) - u_0 v_x(x_0,y_0) &= 0 \end{cases},$$
sendo (S) um sistema linear nas variáveis $\alpha = u_x(x_0,y_0)$ e $\beta = v_x(x_0,y_0)$ cujo determinante é $-u_0^2 - v_0^2 = -|f(z_0)|^2 \neq 0$.
Logo, a solução única de (S) é $u_x(x_0,y_0) = v_x(x_0,y_0) = 0$; donde, $f'(z_0) = 0$.

(b) A função $f(z) = z\,, z \in \mathbb{C}$, é tal que $|f|$ tem valor mínimo absoluto 0 em $z_0 = 0$. Porém, $f'(0) = 1$.
**Adendo:** Assim sendo, se $z_0$ é ponto de máximo local então $f'(z_0) = 0$ e, pelo Princípio dos Zeros Isolados aplicado a $f'$, ou $f'$ é identicamente nula na componente conexa $O$ (aberta) de $\Omega$ contendo $z_0$ ou $z_0$ é o único zero de $f'$ num disco $D(z_0;R)$ centrado em $z_0$ e portanto, como nos pontos de máximo locais de $|f|$ a derivada $f'$ é nula, $z_0$ é o único ponto de máximo local de $|f|$ restrita a $D(z_0;R)$. Logo, sobre os círculos centrados em $z_0$ e contidos em $D(z_0;r)$ o valor absoluto de $|f|$ é estritamente inferior a $|f(z_0)|$, o que não é possível pois contradiz o comentário à parte (a) da resolução da Questão 5 da prova P3. Assim, temos $f' \equiv 0$ em $O$ e $f =$ cte. em $O$ ∎

7. Mostre que $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1$ se e somente $z \in \mathbb{R}$.

**Sugestão:** Utilize as expressões para $\cos z$ e $\sin z$ de sua preferência:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad .$$

Particularmente, indico as expressões em séries.

**Resolução:**

Pelas expressões em séries é óbvio que (1) $z \mapsto \cos z$ é par, isto é, $\cos(-z) = \cos z$, e (2) $z \mapsto \sin z$ é ímpar, isto é, $\sin(-z) = -\sin z$ e, devido à continuidade da função conjugação $z \mapsto \overline{z}$, temos (3) $\overline{\cos z} = \cos\overline{z}$ e (4) $\overline{\sin z} = \sin\overline{z}$

Ainda, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ temos $\cos(x_0+y) - (\cos x_0 \cos y - \sin x_0 \sin y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Logo, a função inteira

$$\mathbb{C} \ni w \mapsto \cos(x_0+w) - (\cos x_0 \cos w - \sin x_0 \sin w)$$

se anula em $\mathbb{R}$ e, pelo Princípio dos Zeros Isolados, é a função nula sobre $\mathbb{C}$, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Portanto, fixado $w_0 \in \mathbb{C}$, a função inteira

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \cos(z+w_0) - (\cos z \cos w_0 - \sin z \sin w_0)$$

se anula em $\mathbb{R}$ e, pelo Princípio dos Zeros Isolados, é a função nula sobre $\mathbb{C}$, qualquer que seja $w_0 \in \mathbb{C}$. Provamos então,

$$(*) \qquad \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \,, \forall z \,, \forall w \in \mathbb{C} \ .$$

Utilizando a identidade (*) temos que

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 + |\sin z|^2 &= \cos z\,\overline{\cos z} + \sin z\,\overline{\sin z} = \cos z \cos\overline{z} + \sin z \sin\overline{z} \\ &= \cos z \cos(-\overline{z}) - \sin z \sin(-\overline{z}) = \cos(z - \overline{z}) \ . \end{aligned}$$

Se $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, temos $z - \overline{z} = 2bi$ e

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cos(2bi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2bi)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(i)^{2n}(2b)^{2n}}{(2n)!}.$$

Mas, $i^{2n} = (-1)^n$ e portanto,

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2b)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2b)^{2n}}{(2n)!}.$$

Consequentemente, $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1 \iff b = 0 \quad \blacksquare$

8. Determine a série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$ em torno de $z = 3$. Explicite sua parte principal e indique $Res(f;3)$.

**Obs:** o resíduo numa série de Laurent $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ é o coef. $b_1$.

**Resolução:**

Temos, para $|z-3| < 1$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+(z-3)} = \frac{1/3}{1+\frac{z-3}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-3}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}(z-3)^k\,,$$

e então

$$-\frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(-1)^k}{3^k}(z-3)^{k-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}(z-3)^n\ ,$$

e finalmente, como $(-1)^{n+2} = (-1)^n$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-3)^2} &= \frac{1}{(z-3)^2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(-1)^n}{3^{n+2}}(z-3)^n\right] \\ &= \frac{1/9}{(z-3)^2} + \frac{-2/27}{z-3} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n+1)(-1)^n}{3^{n+2}}(z-3)^{n-2}\ , \quad 0 < |z-3| < 3\ .\end{aligned}$$

Logo, a parte principal é:

$$\frac{1/9}{(z-3)^2} + \frac{-2/27}{z-3}$$

e o resíduo de $f$ no ponto 3 é,

$$\text{Res}(f;3) = -\frac{2}{27} \qquad \blacksquare$$

9. Para a função

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2\ (z^2+4)},$$

(a) Determine as singularidades e classifique-as.

(b) Indique as ordens dos polos e compute os respectivos resíduos de $f$.

**Resolução:**

(a) As singularidades são raízes do denominador $(z+1)^2(z^2+4)$: $-1$, $-2i$ e $+2i$. Como o numerador $z^2 - 2z = z(z-2)$ não se anula em tais singularidades, as três são singularidades não removíveis.

(b) Ainda, como

$$\lim_{z\to -1}(z+1)^2 \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} = \lim_{z\to -1} \frac{z^2-2z}{(z^2+4)} = \frac{3}{5} \neq 0\,,$$

$$\lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to -2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)} = \frac{-4+4i}{(1-2i)^2(-4i)} \neq 0\,,$$

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to 2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)} = \frac{-4-4i}{(1+2i)^2 4i} \neq 0,$$

segue que $-1$ é polo de ordem 2 e, $-2i$ e $2i$ são polos de ordem 1. Os resíduos de $f$ em $-2i$ e $2i$ são,

$$\mathrm{Res}(f;-2i) = \frac{-4+4i}{(1-2i)^2(-4i)} = \frac{-1-i}{(1-2i)^2} = \frac{7-i}{25} \quad \text{e}$$

$$\mathrm{Res}(f;2i) = \frac{-4-4i}{(1+2i)^2(4i)} = \frac{-1+i}{(1+2i)^2} = \frac{7+i}{25}\,.$$

Com a notação usual para séries de Laurent, o resíduo de

$$f(z) = \frac{b_2}{(z+1)^2} + \frac{b_1}{z+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z+1)^n$$

em $-1$ é o número $b_1$, que obtemos pela multiplicação

$$g(z) = (z+1)^2 f(z) = b_2 + b_1(z+1) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z+1)^{n+2}$$

e, lembrando a Fórmula de Taylor para os coeficientes de séries de potências, computando a derivada $g'(-1)$. Isto é,

$$\mathrm{Res}(f;-1) = b_1 = g'(-1)\,, \quad g(z) = \frac{z^2-2z}{z^2+4}\,.$$

Assim, visto que $g'(z) = \frac{(2z-2)(z^2+4)-(z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2}$ temos

$$\mathrm{Res}(f;-1) = \frac{-20+6}{25} = -\frac{14}{25} \quad \blacksquare$$

10. Determine a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)},$$

na coroa circular centrada na origem $1 < |z| < 4$.

**Resolução:**

Temos, se $|z| < 4$,

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4-z} = -\frac{1/4}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} \ ,$$

e, se $|z| > 1$,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1/z}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \ .$$

Logo, se $1 < |z| < 4$,

$$\frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{-(1/3)}{z-1} + \frac{1/3}{z-4} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} \quad \blacksquare$$

11. Se $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absoluta/e [e uniforme/e] em $\overline{D}_1(0)$ substituindo $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, também representamos $f$ por sua **Série de Fourier de** $f$,

$$(*) \qquad f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{in\theta}\,, \;\; \theta \in [0, 2\pi]\;.$$

Verifique:

(a) Se $\delta_{nm}$ é o $\delta$ **de Kronecker**, $\delta_{nm} = 0$ se $n \neq m$ e $\delta_{nm} = 1$ se $n = m$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta \;= \delta_{nm}\;.$$

(b) a expressão para os **Coeficientes de Fourier** de $f$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta\;.$$

**Sugestão para (b):** Multiplique (*) por $e^{-im\theta}$, $m \in \mathbb{N}$, e integre a série obtida termo a termo, no intervalo $[0, 2\pi]$ (justifique porque é permitido).

**Resolução:**

(a) Se $n = m$ é óbvio que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 = \delta_{nm}$.
Se $n \neq m$ então,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\, \frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)}\Bigg|_0^{2\pi} = 0\,,$$

pois $\theta \mapsto e^{i(n-m)\theta}$ é $2\pi$-periódica.

(b) Pelas hipóteses temos $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty$ e, também pelo Teste-M de Weierstrass, a série de funções $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{in\theta}$, definidas em $[0, 2\pi]$, converge uniformemente (e absolutamente) à função $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$. Logo, como a função $\theta \mapsto e^{-im\theta}$ é limitada (por 1), a série de funções $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i(n-m)\theta}$ converge uniformemente sobre $[0, 2\pi]$ à função $f(e^{i\theta})e^{-im\theta}$.
Desta forma, podemos integrar termo a termo e obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-im\theta}\, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_n e^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta_{nm} = a_m \qquad \blacksquare$$

12. Se $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente em $\overline{D}_1(z_0)$ e $0 \leqslant r \leqslant 1$ então,

(a) **Igualdade de Parsevall:**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0+re^{i\theta}) \mid^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \mid a_n|^2 \; r^{2n}.$$

(b) Mostre utilizando (a) a seguinte versão do **Princípio do Módulo Máximo:**

Se $|f(z_0)| \geq |f(z)|$, $\forall z \in \overline{D}_1(z_0)$, então $f$ é constante.

**Sugestões:** independentes para os ítens (a) e (b), respectivamente.

(a) Substitua $z = z_0 + re^{it}$ na expressão para $f$ e multiplique a série para $f$ assim obtida pela série analogamente deduzida para $\overline{f}$, conjugada de $f$. Efetue o produto, arbitraria/e associativo, destas séries absoluta/e convergentes e , visto que tal série produto converge uniforme/e, integre termo a termo.

(b) Integre $|f(z_0)|^2 \geq |f(z)|^2$ sobre o círculo unitário ($r = 1$) centrado em $z_0$. Lembre a fórmula para os coeficientes $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

**Resolução:**

(a) Consideremos $r$ fixo, com $0 \leq r \leq 1$.

A série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n||z-z_0|^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n$ converge se $|z-z_0| = r$ e pelo Teste-M de Weierstrass segue a convergência uniforme em $\theta \in [0, 2\pi]$ da série de funções $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$ e de sua conjugada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n}\, r^n e^{-in\theta}$. Obviamente,

$$(*) \quad \begin{cases} f(\,z_0 + re^{i\theta}\,) &= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{i\theta})^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\ \\ \overline{f(\,z_0 + re^{i\theta}\,)} &= \overline{\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_m r^m e^{im\theta}} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \overline{a_m}\, r^m e^{-im\theta}\ . \end{cases}$$

Ainda, pelo Corolário 4.25 é absolutamente somável a sequência dupla

$$\left( a_n r^n e^{in\theta} \overline{a_m}\, r^m e^{-im\theta} \right),$$

$$\text{com} \sum_{n,m} |a_n r^n e^{in\theta} \overline{a_m}\, r^m e^{-im\theta}| \leq \sum_{n,m} |a_n|\,|\overline{a_m}| = \Big( \sum_{\mathbb{N}} |a_n| \Big)^2 < \infty\,,$$

e sua soma é igual ao produto das somas das séries em (*) e é também a soma de qualquer série (todas convergindo absolutamente) formada por um rearranjo linear [Cor. 4.25(b)] de seus termos (da sequência dupla). Logo,

$$\Big| f(\,z_0 + re^{i\theta}\,) \Big|^2 = f(\,z_0 + re^{i\theta}\,)\overline{f(\,z_0 + re^{i\theta}\,)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \ \sum_{m=0}^{+\infty} \overline{a_m}\, r^m e^{-im\theta} =$$

$$= \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_n r^n e^{in\theta} \overline{a_m}\, r^m e^{-im\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}\ .$$

Então, pelo Teste-M de Weiertrass e integrando termo a termo obtemos, utilizando o $\delta$ **de Kronecker** introduzido no item (a) da Questão 11,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f(\,z_0+re^{i\theta}\,)\Big|^2\,d\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{a_m}\;r^{n+m}\;e^{i(n-m)\theta}\,d\theta\;=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\sum_{m=0}^{+\infty}\overline{a_m}\;r^{n+m}\;\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\,d\theta=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\sum_{m=0}^{+\infty}\overline{a_m}\;r^{n+m}\;\delta_{nm}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\;\overline{a_n}\;r^{n+n}\;=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2\,r^{2n}\quad.$$

(b) Por (a) e pela fórmula para os coeficientes de uma série de potências temos,

$$|f(z_0)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|^2\,d\theta\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+e^{i\theta})|^2\,d\theta=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2=|f(z_0)|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|f^{(n)}(z_0)|^2}{n!}\,.$$

Logo, $a_n=f^{(n)}(z_0)=0$, para todo $n\geq 1$, e

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=f(z_0)\,,\;\forall z\in\overline{D}(z_0;1)\qquad\blacksquare$$