Curso: MAT 220- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV - IFUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

A Terceira Prova:

1 - Não cobrirá questões sobre sequências numericas nem séries numéricas.

2 - Cobrirá o material teórico necessario para a lista 6: derivada complexa, séries de potências complexas, raio de convergência e equação de Cauchy-Riemann e, ainda mais,

3 - Quanto a lista 7:

(i) não solicitarei nenhuma questão que requeira aplicar o Teorema de Green (vide questões 3, 4, 5, 6 e 7 da lista 7)mas recomendo para um melhor entendimento da matéria relembra-lo e fazer alguns exercícios.

(ii) no mínimo **5 questões** (totalizando dez pontos na prova) cobrirão o material pedido na lista 6 **e** o material necessário para resolver as **questões 7 até 21** apresentadas na lista 7.

(iii) haverão **duas** questões **extras** que, dependendo até onde avançarmos com a exposição teórica, versarão sobre singularidades (séries de Laurent, polos e resíduos; vide os exercícios sobre singularidades na lista 7, desde o 22 até o 28).

(iv) O Teorema de Rouché (contagem de zeros de uma função analítica) **não** será cobrado nesta prova (vide questões 29 e 30 da lista 7)

4 - Quase todos os exercícios da lista 7 foram retirados do livro já indicado na bibliografia: 'Cálculo em Uma Variável Complexa', Marcio G. Soares, IMPA.; cuja leitura dos capítulos 5 (que estou apresentando em aula) e 6 (que espero ainda iniciar) fortemente recomendo.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira,
São Paulo, 29 de novembro de 2009.

Segue a lista 7 de exercícios nas próximas páginas.

LISTA DE EXERCÍCIOS 7 - Integração

Revisão do Teorema de Green

(1) Leia a demonstração da versão simplificada do Teorema de Green nas páginas 27 a 31 do livro texto 'Cálculo em Uma Variável Complexa', Marcio G. Soares.

(2) Para cada um dos conjunto abaixo, sua fronteira é descrita por uma curva suave por partes. Esboce o conjunto, sua fronteira e dê uma aplicação que a descreva.

(a) $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\,, \mathrm{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$.

(b) $V = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\,,\ \mathrm{Re}(z) \geq\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

(c) $V = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} \leq |z| \leq 1\,,\ \mathrm{Re}(z) \geq\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

(3) Calcule $\int_{\partial V} f$, com V cada um dos conjuntos do exer. 2 (V e ∂V positiva/e orientados) e

$$f(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big) \quad , \quad f(x,y) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)\ .$$

4) Seja V como no enunciado do Teorema de Green. Mostre que a área de V é dada por

$$\int_{\partial V} xdy\ .$$

(5) Use (4) para calcular a área de

$$V = \Big\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\Big\} \quad \text{e} \quad V = \Big\{(x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9\,,\ 1 \leq xy \leq 4\Big\}\ .$$

(6) Calcule (V e ∂V positiva/e orientados)

$$\int_{\partial V} (x^2 - y^2)dx + 2xydy \quad \text{e} \quad \int_{\partial v} 2xydx + (y^2 - x^2)dy\ ,$$

onde V é

(i) O retângulo delimitado pelas retas $y = x$, $y = -x + 4$, $y = x + 2$ e $y = -x$.

(ii) $V = \{(x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9\,, 1 \leq xy \leq 4\}$.

Holomorfia

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ é derivável em z_0 e se $\tilde{f} = \big(u(x,y)\,, v(x,y)\big)$ é a identificação usual com f através do isomorfismo natural entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ mostramos

$$J(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix}\ ,$$

a forma matricial das equações C-R . EM L1, Exerc. 4, vimos $z = a + bi \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

(7) Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aberto em $\mathbb{C}$, seja $\tilde{f}(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ com a notação acima e suponhamos $\tilde{f}$ **diferenciável** [logo, existem $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$].

(a) Escrevendo,

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i} ,$$

$$f = u(x,y) + iv(x,y) = u\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big) \ + \ iv\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big),$$

desenvolva, utilizando a regra da cadeia, as fórmulas (memorize-as) para

$$\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} ,$$

em termos das derivadas parciais de u e v, em relação às variáveis x e y.

(b) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ se e só se valem as equações de C-R: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

(c) Mostre que valem as equações de C-R se e somente se $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

(d) Interprete o resultado em (c).

(8) Verifique se se cumprem as condições $C - R$ para as seguinte funções

(i) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

(ii) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.

(iii) $f(z) = e^{-x}(cosy - i \sin y)$

(iv) $f(z) = e^{y}(\cos x + i \sin x)$.

(9) Seja $f(z)$ uma função **inteira** (holomorfa em todo o plano complexo). Mostre que a função $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ também é inteira. Mostre, ainda, que a função $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em $z_0 = 0$ se e somente se $f'(0) = 0$.

(10) Mostre que

(a) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad , \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

(b) $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$ e $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$.

(c) $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1$ se e só se z é real

(11) Compute as derivadas e expresse na forma $u + iv$ o **seno e o co-seno hiperbólicos**:

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \quad , \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) .$$

(12) Identifique o erro no **Paradoxo de Bernoulli**:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow \log(-z) = \log z \quad .$$

(13) Usando o ramo principal de z^{λ} calcule $2^{\sqrt{2}}$, $(5i)^{1+i}$ e 1^{i} e 1^{-i}.

(14) Determine o ramo principal da função $\sqrt{z-1}$.

(15) Compute $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde f e γ são dados.

(a) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(c) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(d) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(e) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(f) $f(z) = \pi e^{\pi\overline{z}}$ e γ é o quadrado de vértices 0, 1, $1+i$ e i, positivamente orientado.

(g) $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$.

(h) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $r > 0$, $n \ge 2$.

(i) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(j) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(k) $f(z) = \frac{\log z}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(l) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $n \ge 1$.

(m) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(16) Mostre que $\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z}\,dz = 2\pi i$, onde k é uma constante real e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_0^\pi e^{k\cos t}\cos(k\sin t)\,dt = \pi\ .$$

(17) Se f é uma função inteira e existem $M \ge 0$, $R > 0$ e $n \ge 1$ tais que $|f(z)| \le M|z|^n$ para $|z| \ge R$, mostre que f é um polinômio de grau menor ou igual a n.

(18) Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, Ω um domínio. Suponha que exista $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| \le |f(z)|$, $\forall z \in \Omega$. Mostre que ou $f(a) = 0$ ou f é uma função constante.

(19) Seja f holomorfa num domínio Ω contendo a região fechada e limitada determinada por uma curva de Jordan suave por partes γ e z um ponto intrior a esta região. Se K é o máximo de $|f|$ ao longo de γ e δ é a distância mínima de z a γ então,

$$|f(z)| \le K\Big(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\Big)^{\frac{1}{n}} \quad , \quad L(\gamma) \text{ o comprimento de } \gamma\,,\ \forall n \ge 1\ .$$

Aplique tal desigualdade para dar uma outra prova do **Princípio do Módulo Máximo.**

(20) **Igualdade de Parsevall**: Se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in D_\rho(z_0)$, e se $r < \rho$, então

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta}|^2 d\theta = \sum |a_n|^2 r^{2n}\ .$$

Aplique tal identidade para dar uma outra prova do **Princípio do Módulo Máximo.**

(21) **Princípio da Identidade para Funções Holomorfas** Sejam f e g holomorfas num domínio Ω. Se $X = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tem ponto de acumulação em Ω, então $f \equiv g$.

(22) Determine a expansão de Laurent da função dada em torno de cada uma de suas singularidades, especificando o anel no qual ela é válida.

(i) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)}$

(ii) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$

(iii) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

(iv) $f(z) = \cos \frac{1}{z}$

(v) $f(z) = \frac{z^5}{(z^2-2)^2}$.

(23) Uma função holomorfa num disco em torno de um polo é a soma de duas funções, uma racional e outra holomorfa.

(24) Dê uma função com um polo de ordem 1 em $z = 2$ e um polo de ordem 7 em $z = \sqrt{2}i$.

(25) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e tal que existe $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. Então, f é constante.

(26) Classifique a singularidade 0 de cada uma das funções:

(i) $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ (ii) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$ (iii) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3}$

(iv) $f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (v) $f(z) = \frac{1}{z^8 - z}$ (vi) $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}$.

(27) Determine a ordem do polo de f em a e calcule $\mathrm{res}(f; a)$.

(i) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, $a = 0$.

(ii) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^{n+1}}$, $a = 0$.

(iii) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$, $a = 0$.

(iv) $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

(v) $f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

(vi) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$, $a = 0$.

(vii) $f(z) = \frac{1 - e^{3z}}{z^4}$, $a = 0$.

(viii) $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4 - z^5}$, $a = 1$.

(28) Seja f holomorfa em $\Omega \ni 0$ e ainda:$f(0) = 0$ e 0 é o único zero de f em Ω. Seja g também holomorfa em Ω. Então, f divide g [i.e., $g = hf$, com h holomorfa] se e somente se:

$$\mathrm{res}\left(k\frac{g}{f}\ 0\right) = 0 \quad \text{para toda função holomorfa } k \text{ em } \Omega\ .$$

(29) Ache o número de zeros satisfazendo $|z| < 1$ dos seguintes polinômios:

$$(i) \quad z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 \quad ; \quad (ii) \quad z^4 - 5z + 1 \quad .$$

(30) Se $|a| > e$, a equação $e^z = az^n$ tem n raízes no disco $|z| < 1$.