Curso: MAT 220- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV - IFUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

LISTA DE EXERCÍCIOS 6 - SÉRIES DE NÚMEROS E DE FUNÇÕES

(1) (a) Descreva o domínio da função $g(z) = \frac{y}{x} + \frac{1}{1-y}i$, $(z = x + iy)$.

(b) Seja $\Omega = \{x + iy : x > 0 \text{ e } |y| < 1\}$ e considere a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = y\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt + i\sum_{n=0}^{+\infty} y^n\,, \quad z = x + iy \in \Omega\ .$$

Mostre que $\Omega \subset \mathrm{Dom}(g)$ e que $f(z) = g(z)$, $\forall z \in \Omega$.

(2) Utilizando a definição de limite verifique, para $a, b, z, z_o \in \mathbb{C}$:

(a) $\lim\limits_{z\to z_o}(az + b) = az_o + b$.

(b) $\lim\limits_{z\to z_o}\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_o)$ e $\lim\limits_{z\to z_o}\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z_o)$.

(c) $\lim\limits_{z\to z_o}\overline{z} = \overline{z_o}$.

(3) Calcule os seguintes limites, para $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $z_o \in \mathbb{C}$:

(a) $\lim\limits_{z\to z_o}\frac{1}{z^m}$

(b) $\lim\limits_{z\to i}\frac{iz^3-1}{z+i}$

(c) $\lim\limits_{z\to z_o}\frac{az^2+b\overline{z}^3+c}{|z|^2}$

(d) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^3-iz+1}{z^2+1}$.

(4) Determine o disco de convergência das séries de potências seguintes:

(a) $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\frac{m}{4^m}z^m$

(b) $\sum\limits_{m\geq 1} m!z^m$

(c) $\sum\limits_{m\geq 1}\frac{1}{m^3+1}z^m$

(d) $\sum\limits_{m\geq 1}\frac{(3m)!}{(2m)!}z^m$

(e) $\sum\limits_{m\geq 1}(-1)^{m-1}\frac{(z-5)^m}{m3^m}$

(f) $\sum\limits_{m\geq 1}\frac{(z+1)^m}{(m+1)\log^2(m+1)}$

(g) $\sum\limits_{m\geq 1}\frac{10^m}{(2m)!}(z-7)^m$

(h) $\sum\limits_{m\geq 2}\frac{\log m}{e^m}(z-e)^m$

(5) Mostre que a função Re: $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{C}$ não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

(6) Prove (refaça a demonstração quando for o caso ou dê outra prova), para $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $e^z = e^{z+2\pi i}$

(b) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$

(c) $\frac{\exp(z)}{\exp(w)} = \exp(z - w)$.

(d) $[\exp(z)]^m = \exp(mz)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

(7) Mostre que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(8) Considerando o isomorfismo canônico entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, dado Ω aberto em $\mathbb{C}$ seja $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ o aberto identificado a Ω por tal isomorfismo. Ainda, dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ seja $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$:

$$\tilde{f}(x,y) = \Big(\mathrm{Re}(f(z)),\ \mathrm{Im}(f(z))\Big), \quad z = x + iy\ .$$

Suponha que existe $f^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ [veremos que se existe f' então existe $f^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$].

(a) Mostre que $\tilde{f}$ é de classe C^2.

(b) Compute a matriz jacobiana de $\tilde{f}$ e mostre que o determinante jacobiano de $\tilde{f}$ no ponto $(x,y) \in \tilde{\Omega}$ é $|f'(z)|$, com $z = x + iy$.

(9) Mostre que para uma função $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são equivalentes :

(i) L é $\mathbb{C}$-homogênea [isto é, $L(zw) = zL(w)$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$]

(ii) L é $\mathbb{C}$-linear

(iii) L é uma homotetia de $\mathbb{C}$ [isto é, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $L(z) = \lambda z$, $\forall z \in \mathbb{C}$].