Curso: MAT 220- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV - IFUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

LISTA DE EXERCÍCIOS 5 - SÉRIES DE NÚMEROS E DE FUNÇÕES

1. Escreva a expressão abaixo na forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) $(7 + 4i)(2 - 3i) + (6 - i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{5})$
   (b) $(3 + 2i)\overline{(2 - 3i)}$.
2. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ para que
   (a) $\frac{a+i}{1+ai} \in \mathbb{R}$.
   (b) $\frac{2+\alpha i}{1+i}$ seja imaginário puro.
3. Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^m = 1$ e $z \neq 1$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 2$.
   (a) $1 + z + z^2 + ... + z^{m-1} = 0$
   (b) $1 + z^p + z^{2p} + ...z^{(m-1)p} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{mdc}(m, p) = 1$. Sugestão: Teorema de Bézout: $\exists\, r\,, s \in \mathbb{Z} \mid rm + sp = 1$.
   (c) Se $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 1$, $1 + z + z^2 + ... + z^m = \frac{1-z^{m+1}}{1-z}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$.
4. Seja $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(1 - i) = 3 + 2i$. Compute $p(1 + i)$.
5. Sabendo que $1 - i$ é raíz de $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 2 = 0$, ache todas as raízes da equação.
6. Determine a e b tais que $p(z) = z^4 - 10z^3 + az^2 - 50z + b$ seja um quadrado perfeito.
7. Determine k tal que a divisão de $3z^2 - 2z^4 + z^5 - z^3 - 2z + k$ por $z^3 - 5 - 4z$ seja exata.
8. Seja $p \in \mathbb{C}[z]$, com $p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$. Supondo que os zeros de p estão em uma p.a. determine estes zeros.
9. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto arbitrário.
   (a) Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ e suponha que $p(z) = a_0 z + a_1$, com $a_0 \neq 0$. Mostre que existe um único par (b_0, b_1) de números complexos tal que $p(z) = b_0(z - z_0) + b_1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
   (b) Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ e suponha que $p(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$, com $a_0 \neq 0$. Mostre que existe uma única terna $(b_j)_{0 \leq j \leq 2}$ de números complexos tal que $p(z) = b_0(z - z_0)^2 + b_1(z - z_0) + b_2$.
   (c) Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ e suponha que
   $$p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} \qquad (\forall z \in \mathbb{C}\,,\ a_0 \neq 0)\ .$$
   Mostre que existe uma única sequência $(b_j)_{0 \leq j \leq m}$ em $\mathbb{C}$ tal que
   $$p(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j (z - z_0)^{m-j} \qquad (\forall z \in \mathbb{C})\ .$$

10. Mostre que $|z| = 1$ se e só se $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

11. Se $z + \frac{1}{z} = 1$, calcule $|z|$.

12. Resolva a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$.

13. (a) Mostre que $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{z}{|z|^2}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$.

    (b) Esboce o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\}$.

    Dica: use (a) e a equivalência: $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \overline{w}$.

14. Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, desenhe o conjunto $P = \{z \in \mathbb{C} : \frac{|z-w|}{\mathrm{Im}(z)} = 1\}$.

15. Compute $\frac{(\alpha+i)^4 + \alpha i(1+i)}{(1+i)^4 + 3i}$, com α a determinação de $\sqrt[3]{-8i}$ com afixo no 4 quadrante.

16. (a) Determinar a relação entre $a, b \in \mathbb{R}$ para que sejam reais as raízes da equação:

$$(*) \qquad \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^m = a + ib\,,\ m \in \mathbb{N}^*\ .$$

    (b) Valendo a relação em (a), resolva (*) supondo conhecido o argumento φ de $a + bi$.

17. (a) Mostre que as raízes da equação abaixo são reais:

$$(*) \qquad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^m = \frac{1+ai}{1-ai} \quad (a \in \mathbb{R} \text{ e } m \in \mathbb{N}^*)\,.$$

    (b) Compute as raízes de (*) no caso $a = 1$ e $m = 3$.

18. Calcule a soma da série dada

    (a) $\sum^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

    (b) $\sum^{+\infty} n\alpha^n$, $0 < \alpha < 1$.

    (c) $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)^2}$

    (d) $\sum^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)....(n+p)}$, onde $p \geq 1$ é um natural fixo.

19. Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

    (a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}$, $\alpha > 0$.

    (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n[\log(\log n)]^\alpha}$, $\alpha > 1$

    (c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n[\log(\log n)]^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

    (d) $\sum^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$, $\alpha > 0$

    (e) $\sum^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$, $\alpha > 0$.

20. Seja $z, w \in \mathbb{C}$, com $|z|, |w| \leq 1$ e $z + w = 1$. Mostre que $|z + w^2| \leq 1$.

21. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

   (a) $\sum^{+\infty} \frac{\cos^2 n+n^2}{n^4}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-\cos\frac{1}{n^2})$.

   (c) $\sum^{+\infty} \log(1+\frac{1}{n^2})$.

   (d) $\sum^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+3n+1}}{n^3(\log n)^2}$

   (e) $\sum^{+\infty} \frac{(\log n)^3}{n^2}$.

   (f) $\sum^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

   (g) $\sum^{+\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+3}-1\right)$.

   (h) $\sum^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$.

22. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ é convergente ou divergente? Justifique.

23. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

   (a) $\sum^{+\infty} n\alpha^n$, onde $\alpha > 0$ é um real dado.

   (a) $\sum^{+\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$

   (b) $\sum^{+\infty} \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^n$

   (c) $\sum^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$

   (d) $\sum^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

   (e) $\sum^{+\infty} 3^n \frac{n!}{n^n}$.

   (f) $\sum^{+\infty} \frac{n!}{3.5.7.....(2n+1)}$

   (g) $\sum^{+\infty} \frac{2.4.6.....(2n)}{n^n}$

24. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

(b) $\sum^{+\infty} \frac{n^{n-p}}{n!}$.

(c) $\sum^{+\infty} \frac{1.3.5.....(2n+1)}{4.6.8......(2n+4)}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1.3.5......(2n-1)}{2.4.6....(2n)}}$.

25. Seja $0 < \alpha < 1$. A série (não alternada) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ é convergente.

26. Seja $0 < \alpha < 1$. A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ é alternada e convergente.

27. Nos exercícios abaixo determine se a série $\sum\limits^{+\infty} a_n$ é convergente ou divergente. No caso de convergêcia, verifique se a convergência é absoluta ou condicional.

   (a) $a_n = \frac{\sin(2n+1)}{n^{20}}$

   (b) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n-3}{10n+4}$

   (c) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\log n}$

   (d) $a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}$

   (e) $a_n = (-1)^n \left[\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\right]^3$

   f) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\log(e^n+e^{-n})}$.

28. Determine x para que a série seja convergente:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} x^{2n}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot x^n$

   (d) $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

   (e) $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

   (f) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

   (g) $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{x^n}{ln\, n}$

   (h) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x^n}{1.3.5......(2n+1)}$.

   (i) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^n}{n!}$.

29. Determine o domínio e esboce o gráfico:

   (a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$ (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n$

30. Seja (b_n) uma sequência de termos estritamente positivos tal que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = L\,,\ L \neq 0 \quad .$$

   (a) Se $L > 0$ temos,

      (i) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n^p$ é convergente.

      (ii) $\lim b_n = 0$.

(b) Se $L < 0$, $\lim b_n \neq 0$.

Dica: Vide "Um Curso de Cálculo", H. L. Guidorizzi, 5 ed., vol 4, pp. 71 e 489.

31. Consideremos a sequência $(|a_n|)$, $n \geq 1$, $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

(a) Se $-1 < \alpha$ então $\lim a_n = 0$ e $(|a_n|)_{n \geq n_0}$, $n_0 > \alpha$, decresce.

(b) Se $\alpha < -1$, α inteiro ou não, então $\lim a_n \neq 0$.

(c) Se $-1 < \alpha < 0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ converge condicionalmente.

(d) Se $\alpha < -1$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ diverge.

Dica: Utilize o exercício 6 acima.

32. Mostre que $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, satisfaz,

(a) Se $\alpha \geq 0$, converge (absolutamente) se somente se $x \in [-1, 1]$.

(b) Se $-1 < \alpha < 0$, converge se somente se $x \in (-1, 1]$ e condicionalmente se $x = 1$.

(c) Se $\alpha \leq -1$, converge se e somente se $x \in (-1, 1)$.

33. Para $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ [dica: compute as partes real e a imaginária da expressão em (a)],

(a) $e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + ... + e^{nit} = \frac{e^{nit}-1}{1-e^{-it}} = \frac{sen(n\frac{t}{2})}{sen(\frac{t}{2})} e^{i(n+1)\frac{t}{2}}$.

(b) $cos\, t + cos\, 2t + ... + cos\, nt = \frac{sen\frac{nt}{2} cos(n+1)\frac{t}{2}}{sen\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{sen(2n+1)\frac{t}{2}}{2sen\frac{t}{2}}$ [**n-núcleo de Dirichlet**].

(c) $sen\, t + ... + sen\, nt = \frac{cos\frac{t}{2} - cos(n+\frac{1}{2})t}{2sen\frac{t}{2}} = \frac{sen\frac{nt}{2} sen(n+1)\frac{t}{2}}{sen\frac{t}{2}}$ [**n-núcleo conjugado**].

34. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos\, nx}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\, nx}{n}$ convergem,
Sugestão: Utilize o exercício imediatamente anterior, e o critério de Dirichlet.

35. Encontre $f(x) = \lim f_n(x)$, $\forall x \in X$, e mostre que (f_n) não converge uniformemente a f.

(a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$. Dica: analise em $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

(b) $\frac{n}{x+n}$, $X = [0, +\infty)$. Dica: analise em $x_n = n$.

(c) $f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$, se $x \neq 0$ e $f_n(0) = 1$; $X = \mathbb{R}$.

(d) $f_n(x) = (1 - 2nx^2)e^{-nx^2}$; $X = \mathbb{R}$.

(e) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$; $X = \mathbb{R}$.

(f) $X = [0, 1]$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - x\,, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1\ . \end{cases}$$

36. Mostre a convergência uniforme de (f_n) em $X \subset \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

   (a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^7}$; $X = \mathbb{R}$.

   (b) $f_n(x) = e^{-nx} \sin x$; $X = [0, +\infty)$

   (c) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$; $X = \mathbb{R}$.

37. Determine $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in [0,1]$, e mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))dx$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x\,, \; 0 \le x \le \frac{1}{2^n} \\ n^2(\frac{1}{n} - x)\,, \frac{1}{2^n n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0\,, \frac{1}{n} \le x \le 1\ . \end{cases}$$

38. Sendo $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$, mostre que f_n converge simplesmente a f (determine f) mas não uniformemente. Ainda assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx\ .$$

39. Para cada $n \ge 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

   (a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

   (b) A convergência da sequência (f_n) a f é uniforme sobre $\mathbb{R}$? E sobre $[r, +\infty), r > 0$?

40. Para cada $n \ge 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$, $x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

   (a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

   (b) A convergência é uniforme sobre $[0,1]$? Justifique. Vide sugestão no livro.

   (d) Mostre que $\int_0^1 [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]\, dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

41. Mostre que a série dada converge uniformemente no intervalo dado.

   (a) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $[-r, r], r > 0$.

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, em $[-r, r], 0 < r < 1$.

42. Mostre que a função dada é contínua.

   (a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx^3}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}$, $x \in [1, +\infty)$.

43. Seja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Justifique a igualdade: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$.