Curso: MAT 220- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV - IFUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

LISTA DE EXERCÍCIOS 4 - SÉRIES

1. Determine $x \in \mathbb{R}$ para que a série seja convergente .

(a) $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. (b) $\sum_{2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

(d) $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{ln\, n}$ (e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{1.3.5......(2n+1)}$. (f) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^n}{n!}$.

2. Estude, com relação à convergência ou divergência:

   (a) $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \log k \ \log(\log k)}$ (b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1}$ (c) $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \ \log(k)}$

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} n$ (e) $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k^2+5}{k^2 \ (\log k)^3}$

3. Dadas as séries $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, seja a_n o termo geral de cada uma delas. Verifique:

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ (Teste da razão).

   (b) $\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = 1$ (Critério de Raabe).

   (c) A primeira diverge e a segunda converge.

4. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ é convergente ou divergente? Justifique.

5. Quais os valores de $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ tais que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha}$ é convergente ?

6. Seja (b_n) uma sequência de termos estritamente positivos tal que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = L \,,\ L \neq 0 \quad .$$

   (a) Se $L > 0$ temos,

      (i) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^p$ é convergente.

      (ii) $\lim b_n = 0$.

   (b) Se $L < 0$, $\lim b_n \neq 0$.

   Dica: Vide "Um Curso de Cálculo", H. L. Guidorizzi, 5ª ed., vol 4, pp. 71 e 489.

7. Consideremos a sequência $(|a_n|)$, $n \geq 1$, $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

   (a) Se $-1 < \alpha$ então $\lim a_n = 0$ e $(|a_n|)_{n \geq n_0}$, $n_0 > \alpha$, decresce.

   (b) Se $\alpha < -1$, α inteiro ou não, então $\lim a_n \neq 0$.

   (c) Se $-1 < \alpha < 0$ então $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ converge condicionalmente.

   (d) Se $\alpha < -1$ então $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ diverge.

   Dica: Utilize o exercício 6 acima.

8. Mostre que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, satisfaz,

   (a) Se $\alpha \geq 0$, converge (absolutamente) se somente se $x \in [-1, 1]$.

   (b) Se $-1 < \alpha < 0$, converge se somente se $x \in (-1, 1]$ e condicionalmente se $x = 1$.

   (c) Se $\alpha \leq -1$, converge se e somente se $x \in (-1, 1)$.

9. Para $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ [dica: compute as partes real e a imaginária da expressão em (a)],

   (a) $e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + ... + e^{nit} = \frac{e^{nit}-1}{1-e^{-it}} = \frac{sen(n\frac{t}{2})}{sen(\frac{t}{2})} e^{i(n+1)\frac{t}{2}}$.

   (b) $cos\, t + cos\, 2t + ... + cos\, nt = \frac{sen\frac{nt}{2} cos(n+1)\frac{t}{2}}{sen\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{sen(2n+1)\frac{t}{2}}{2sen\frac{t}{2}}$ [**n-núcleo de Dirichlet**].

   (c) $sen\, t + ... + sen\, nt = \frac{cos\frac{t}{2} - cos(n+\frac{1}{2})t}{2sen\frac{t}{2}} = \frac{sen\frac{nt}{2} sen(n+1)\frac{t}{2}}{sen\frac{t}{2}}$ [**n-núcleo conjugado**].

10. Mostre que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{cos\, nx}{n}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\, nx}{n}$ convergem,
    Sugestão: Utilize o exercício 9, acima, e o critério de Dirichlet.

11. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

    (a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

    (b) A convergência da sequência (f_n) a f é uniforme sobre $\mathbb{R}$? E sobre $[r, +\infty), r > 0$?

12. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

    (a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

    (b) A convergência é uniforme sobre $[0, 1]$? Justifique. Vide sugestão no livro.

    (d) Mostre que $\int_0^1 [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]\, dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

13. Mostre que a série dada converge uniformemente no intervalo dado.

    (a) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $[-r, r], r > 0$.

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, em $[-r, r], 0 < r < 1$.

14. Mostre que a função dada é contínua.

    (a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx^3}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

    (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}$, $x \in [1, +\infty)$.

15. Seja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Justifique a igualdade: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$.