**MAT220 - Cálculo IV - Bacharelado Física**
**$2^{\underline{o}}$ semestre de 2009**
*Prof. Oswaldo Rio Branco*

**Lista 1 de Exercícios**

1. Escreva na forma binômica os números complexos:

   a) $(1+2i)^3$ b) $\dfrac{5}{-3+4i}$ c) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$

2. Se $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, determine as partes real e imaginária de:

   a) $z^4$ b) $\dfrac{1}{z}$ c) $\dfrac{z-1}{z+1}$ d) $\dfrac{1}{z^2}$

3. Mostre que $\left(\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ e $\left(\dfrac{\pm 1i \pm \sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1.$

4. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o anel das matrizes quadradas de ordem 2 com coeficientes reais, munido das operações usuais de adição e multiplicação.

   Seja $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Mostre que a função

$$\varphi : a + ib = z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$$

   é isomorfismo de corpos [i.e., $\varphi$ é bijetora e preserva adição e multiplicação].

5. Calcule $|z|$ nos seguintes casos:

   a) $z = -2i(3+i)(2+4i)(1+i)$ b) $z = \dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$

6. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ mostre que:

   a) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w})$

   b) $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2Re(z\overline{w})$

   c) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (lei do paralelogramo)

   Sugestão: $|z \pm w|^2 = (z \pm w)\overline{(z \pm w)}$

7. Escreva as expressões abaixo na forma $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

   a) $(4-i) + i - (6+3i)i$ b) $\dfrac{3-i}{4+5i}$ c) $\dfrac{(2-i)^2}{(3+i)^2}$

8. Calcule $i^2, i^3, i^4, i^5$. Mostre que se $m \in \mathbb{N}^*$ e $q$ e $r$ são o quociente e o resto da divisão inteira de $m$ por 4 (isto é, $m = 4q + r, \quad 0 \leq r \leq 3$), então $i^m = i^r$. Compute:

   a) $i^{20}$ b) $i^{1041}$ c) $i^{72}$ d) $1+i+i^2+...+i^{2009}$

9. Resolva os sistemas lineares em $z$ e $w$:

   a) $\begin{cases} z + iw = 1 \\ iz + w = 2i - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} iz + (1+i)w = 1 \\ (1+i)\overline{z} - (6+i)\overline{w} = -4 - 8i \end{cases}$

10. Desenhe a região do plano determinado por:

    a) $Re(z) = 1$ b) $Im(z) = -1$ c) $1 \leq Im(z) < 3$

    d) $-1 < Re(z) \leq 2$ e) $Re(z) = Im(z)$ f) $Re(z^2) = 1$

11. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \; z_1 \neq z_2$ e $a \in \mathbb{R}_+^*$, desenhe os subconjuntos:

    a) $\{z : |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}, \; 2a > |z_1 - z_2|$

    b) $\{z : |z - z_1| - |z - z_2| = 2a\}, \; 2a < |z_1 - z_2|$

    c) $\{z : |z - z_1| = a\}$

12. Determine e represente graficamente:

    a) as raízes quadradas de 1.

    b) as raízes cúbicas de 1.

    c) as raízes quartas de 1.

13. Resolva as equações:

    a) $x^6 + ix^3 = 0$ b) $x^{10} + 64x^2 = 0$ c) $2x^6 + \frac{i}{2}x^2 = 0$

    d) $x^6 + 3x^3 + 2 = 0$

14. Calcule $z$ sabendo que $|z| = |1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right|$.

15. Desenhe a região do plano determinada por

    a) $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| \leq 1$ b) $Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$ c) $|z + 1| = 2|z|$

16. Se $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ calcule:

    a) $z^6$ b) $1 + z + z^2 + ... + z^{47}$

17. Ache todos os valores de:

a) $(2+2i)^{3/2}$ b) $(-1+i\sqrt{3})^{1/3}$ c) $(-1)^{-3/4}$

18. Sob que condições se tem $|z+w| = |z-w|$? Interprete geometricamente.

19. Fixada a base canônica de $I\!R^2$ e utilizando o isomorfismo $\varphi : K \to \mathbb{C}$ definido no exercício 4, mostre que um número complexo $z$ é identificado com o produto da matriz que representa a homotetia de coeficiente $|z|$ sobre $I\!R^2$,

$$T_{|z|} = \begin{bmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{bmatrix} = |z|I \ , \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pela matriz

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \theta = \arg(z),$$

representante da rotação pelo ângulo $\theta$ no sentido anti-horário. Isto é,

$$z \equiv T_{|z|} \circ R_\theta = |z| \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \theta = \arg(z) \ .$$

20. Seja $m \in I\!N, \ m \geq 2$. Verifique:

a) Existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\{z : z^m = 1\} = \{1, w, w^2, ..., w^{m-1}\}$. Dizemos que $w$ é um gerador do conjunto das $m$ raízes da unidade.

b) Se $z_1$ é uma raiz $m$-ésima qualquer de $z \in \mathbb{C}^*$ e $w$ é como no ítem (a) então $\{z_1, z_1 w, ..., z_1 w^{m-1}\}$ é o conjunto das $m$ raízes $m$-ésimas de $z$.

c) O complexo $w$ no ítem (a) não é único.