

Curso: CÁLCULO
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 0 - Recordação

BOA SORTE !

Verifique os resultados abaixo. Mantenha esta lista e as demonstrações sob fácil acesso.

Notação: x é um número ou uma variável real e z é um número ou uma variável complexa.

1. **Binômio de Newton** Dados a, b em \mathbb{R} temos,

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

Sugestão: Por indução. Lembrete: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ e $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $p = 0, 1, 2, \dots, n$.

2. **Progressão Geométrica**

$$s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

3. **Uma Fatoração Polinomial**

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1), \forall n \in \mathbb{N} .$$

4. **Um Produto Notável** Dados $a, b \in \mathbb{R}$ temos,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N} .$$

5. **Teorema** Todo polinômio real e de grau ímpar têm ao menos uma raiz real.

6. **Raízes de** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $n \geq 1$, **com coeficientes, a_i , inteiros:**

(i) Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é raiz então $\alpha | a_0$.

(ii) Se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é raiz, $\text{mdc}(p, q) = 1$, então p divide a_0 e q divide a_n .

7. Resolva algumas equações de segundo grau sem a **fórmula de Baskhara** e então prove-a.

8. Sejam α, β em \mathbb{R} .

$$(a) \quad \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta - \text{sen}\beta \cos\alpha \quad (b) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\alpha \text{sen}\beta.$$

$$(c) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \quad (d) \quad \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \text{sen}\beta \cos\alpha.$$

9. **Desigualdade Triangular** $|a + b| \leq |a| + |b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

10. O número $\sqrt{2}$ é irracional.

11. Mostre que, no **plano de Argand-Gauss**, se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 = 1$, então existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que,

$$z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta .$$

12. Se $z_1 = \cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2$ então,

$$z_1 z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) .$$

13. Definindo $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ (**Fórmula de Euler**) temos a **Fórmula de Moivre**:

$$z^n = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta) = e^{in\theta} , \forall n \in \mathbb{N} .$$

14. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, o **módulo** de z é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o **conjugado** é $\bar{z} = a - ib$.

- (a) Se $z \neq 0$ então $\exists! \theta \in \mathbb{R}$, módulo 2π , tal que $z = |z|e^{i\theta}$.
 (b) Represente z , θ , $|z|$ e \bar{z} (simétrico a z em relação ao eixo real).
 (c) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
 (d) Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ e $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
 (e) Se $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, então $\bar{z} = e^{-i\theta}$.

15. **Desigualdade Triangular**: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

16. Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ então, $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

17. Se $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $|\omega| = 1$, então,

$$\exists \omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \bar{\omega} = a - ib .$$

18. Sejam $\omega_2 = x_2 + iy_2 = e^{i\theta_2}$ e $\omega_1 = x_1 + iy_1 = e^{i\theta_1}$, com $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, números complexos unitários (isto é, de comprimento 1). Então,

$$(a) \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = \cos(\theta_2 - \theta_1) + i\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) ,$$

$$(b) \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = (x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1) .$$

19. **Fórmula para o ângulo entre as representações dos números z_1 e z_2 em \mathbb{C}^*** , $z_j = x_j + iy_j = |z_j|e^{i\theta_j}$, com $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, 2$,

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|z_1| |z_2|} .$$

20. **Distância de Ponto a Reta** A equação geral de uma reta no plano cartesiano é: $D : ax + by + c = 0$; a ou b não nulo. Dado $P_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, a distância de P_o à reta D é :

$$|\overline{PD}| = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$