$1^{\underline{a}}$ Prova de MAT0220 - Cálculo IV - IFUSP
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2009
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ________________GABARITO_________________________

N$^{\underline{o}}$USP : ____

1. Dados $a, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}^*$, prove que as raízes da equação em $z \in \mathbb{C}$:

$$(*) \qquad (z-b_1)^m + a(z-b_2)^m = 0$$

estão sobre uma circunferência ou uma reta e resolver a equação.

Resolução: Supondo $z \neq b_2$ tal que:

$$\frac{(z-b_1)^m}{(z-b_2)^m} = -a \quad \text{e} \quad \frac{|z-b_1|}{|z-b_2|} = \sqrt[m]{|-a|} = r \in [0, +\infty) \ ,$$

temos $|z-b_1|^2 = r^2|z-b_2|^2$ e, se $z = x+iy$, $b_i = c_i + id_i$, $c_i's\,, d_i's \in \mathbb{R}$ e $r \neq 1$,

$$(x-c_1)^2 + (y-d_1)^2 = r^2(x-c_2)^2 + r^2(y-d_2)^2 \ \text{ ou}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2(c_2r^2 - c_1)}{1-r^2}x + \frac{2(d_2r^2-d_1)}{1-r^2}y = \frac{r^2(c_2^2+d_2^2) - c_1^2 - d_1^2}{1-r^2} \quad \text{ou}$$

$$\left(x - \tfrac{c_2r^2-c_1}{1-r^2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{d_2r^2-d_1}{1-r^2}\right)^2 = \left(\tfrac{c_2r^2-c_1}{1-r^2}\right)^2 + \left(\tfrac{d_2r^2-d_1}{1-r^2}\right)^2 - \tfrac{c_1^2+d_1^2-r^2(c_2^2+d_2^2)}{1-r^2}$$

$$= \tfrac{r^2(c_1-c_2)^2 + r^2(d_1-d_2)^2}{(1-r^2)^2} = \tfrac{r^2}{(1-r^2)^2}|b_1-b_2|^2 \ ,$$

que define uma circunferência se $b_1 \neq b_2$ e $r \neq 1$; e, se $r \neq 1$ e $b_1 = b_2$ um ponto. Se $r = 1$, $|z-b_1| = |z-b_2|$ define a mediatriz de $\overline{b_1b_2}$, se $b_1 \neq b_2$. Se $b_1 = b_2$ obtemos de (*), $(1+a)(z-b_1)^m = 0$ que tem solução única se $a \neq -1$.

Seja $\sqrt[m]{-a}$ uma das m raízes m-ésimas de $-a$ e $z \in \mathbb{C}$, $z \neq b_2$, o correspondente complexo tal que $\sqrt[m]{-a} = (z-b_1)(z-b_2)^{-1}$. É claro que:

$$\sqrt[m]{-a} = \frac{z-b_1}{z-b_2} = \frac{z-b_2+b_2-b_1}{z-b_2} = 1 + \frac{b_2-b_1}{z-b_2} \ .$$

Donde, se $b_1 \neq b_2$ e $-a \neq 1$ as m soluções do problema original são:

$$z = b_2 + \frac{b_2-b_1}{\sqrt[m]{-a}-1} \ ,$$

No caso $a = -1$ e $b_1 \neq b_2$ temos $(\frac{z-b_1}{z-b_2})^m = 1$ e $\frac{z-b_1}{z-b_2} = \sqrt[m]{1} \neq 1$ (1 não é raíz aceitável pois $\frac{z-b_1}{z-b_2} \neq 1$) e achamos, procedendo como acima, $m-1$ soluções ∎

2. Determine a e b reais de modo que o polinômio

$$p(z) = z^5 - 7z^4 + 22z^3 + az^2 + 45z + b$$

admita $\alpha_1 = 1 + i\sqrt{2}$ como raíz de multiplicidade 2 e, para os valores achados de a e b, determine todas as raízes de p.

Resolução: Como p tem coeficientes reais temos que $\overline{\alpha_1} = 1 - i\sqrt{2}$ é também raíz de multiplicidade 2 e existe ainda uma raíz simples $\beta \in \mathbb{R}$. Temos,

$$z^5 - 7z^4 + 22z^3 + az^2 + 45z + b = [(z - \alpha_1)(z - \overline{\alpha_1})]^2 (z - \beta) = (z^2 - 2z + 3)^2 (z - \beta) =$$

$$= (z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 9)(z - \beta) =$$

$$= z^5 - (\beta + 4)z^4 + (4\beta + 10)z^3 + (-10\beta - 12)z^2 + (12\beta + 9)z - 9\beta \ .$$

Assim, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \beta + 4 & = 7 \\ 4\beta + 10 & = 22 \\ -10\beta - 12 & = a \\ 12\beta + 9 & = 45 \\ -9\beta & = b\,, \end{cases}$$

encontramos $\beta = 3$, $a = -42$ e $b = -27$. Portanto, temos

$$p(z) = z^4 - 7z^4 + 22z^3 - 42z^2 + 45z - 27\,,$$

com raízes duplas $1 + i\sqrt{2}$ e $1 - i\sqrt{2}$, e raíz simples $\beta = 3$ ■

3. Calcule a soma das séries.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$

Resolução:

(a) Claramente temos

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \lim_{N\to+\infty} \left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+....+\left(\frac{1}{N^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right) = 1\ .$$

(b) Notemos que $\frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}\right)$.

Se (s_n) é a n-ésima soma parcial da série dada temos,

$$s_n = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right) + ... + \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right)\right],$$

metade da $2n$-ésima soma parcial t_{2n} da série de Leibnitz (Ex. 3.15, p. 42):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1} + ...\quad .$$

Logo, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} t_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} t_n = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$ ■

4. Determine se são convergentes ou divergentes as séries abaixo.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2-3}{\sqrt[3]{k^9+k^2+1}}$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2+3k+1}{(\log\ k)^{10}}$

Resolução:

(a) Como $\sum\limits^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ e pelo critério da comparação no limite,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{k^2-3}{\sqrt[3]{k^9+k^2+1}}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^3(1-\frac{3}{k^2})}{k^3\sqrt[3]{1+\frac{1}{k^7}+\frac{1}{k^9}}} = 1\ ,$$

a série dada diverge.

(b) Mudando da variável discreta k para a variável contínua x e de x para a variável $t = \log x$ e só então aplicando a regra de L'Hospital sucessivamente é fácil ver que o limite do termo geral da série dada é:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+3k+1}{(\log\ k)^{10}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{(\log\ x)^{10}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{2t}+3e^t+1}{t^{10}} = +\infty\,.$$

Logo, a série diverge $\blacksquare$

5. Determine se são convergentes ou divergentes as séries abaixo.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+k}}\right)$

Resolução:

(a) Como $\lim \sqrt[k]{k} = 1$, comparando com a série harmônica obtemos,

$$\lim \frac{\frac{1}{k\sqrt[k]{k}}}{\frac{1}{k}} = 1\,,$$

logo, pelo critério da comparação no limite a série dada diverge.

(b) Pelo 1º Limite Fundamental, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, e aplicando o critério da comparação no limite para comparar com a série $\sum\limits^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+k}}$ obtemos,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+k}}\right)}{\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+k}}} = 1\ .$$

Logo, a série dada converge se e só se a série $\sum\limits^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+k}}$ converge.

Finalmente, é claro que $\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+k}} \leq \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2}} = \frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}$ e, pelo Exemplo 3.12 p. 41, $\sum\limits^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}$ converge. Portanto, a série apresentada converge ■

6. Determine (prove) se a série abaixo é convergente ou não:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ -1<\alpha<0,$$

Solução: Vide Lista 4 exercício 7(c).

Os n fatores no numerador do termo geral da série (alternada) são negativos e,

$$a_n = (-1)^n |a_n| \quad ; \quad a_n \;=\; \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} \;.$$

Procurando aplicar o critério de Raabe encontramos,

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \;=\; \left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}}\right| \;=\; |\frac{\alpha-n}{n+1}| \;=\; \frac{n-\alpha}{n+1}\;,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-\frac{n-\alpha}{n+1}) \;=\; \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}(\alpha+1) \;=\; \alpha+1\;.$$

Pelo Critério de Raabe, sendo $\alpha+1<1$, $\sum^{+\infty}|a_n|$ é divergente. Por outro lado, temos $\alpha+1>0$ e pelo resultado abaixo provado [exerc. 6, L 4; vide tb. seção **Dúvidas dos Alunos** na página eletrônica] temos $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=0$.

Sendo $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1$, pois $-\alpha<1$, a sequência $(|a_n|)$ é também decrescente.

Finalmente, pelo critério de Leibnitz, $\sum^{+\infty}(-1)|a_n| = \sum^{+\infty} a_n$ é convergente $\blacksquare$

Resultado (exercício 6 Lista 4):

Se $\sum^{+\infty}|a_n|$, $a_n\neq 0\,,\forall n$, é tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}) = L>0$ então existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|^k$ é convergente e, portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=0$.

Prova:

De $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}n\left(1-|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right) = 0\,L = 0$ temos $\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$. Assim, fixado $p\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^p\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right)\left[1+|\frac{a_{n+1}}{a_n}|+.....+\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^{p-1}\right]$$

com

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left[1+|\frac{a_{n+1}}{a_n}|+.....+\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^{p-1}\right] = p\;.$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^p\right] = Lp\;.$$

Sendo $L>0$ podemos escolher $p\in\mathbb{N}$ tal que $L\,p>1$. Para tal valor de p temos, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^p\right]>1$. Logo, pelo critério de Raabe, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|^p$ converge e consequentemente, $|a_n|^p\to 0$. Donde, finalmente, $a_n\to 0$ $\blacksquare$

Vide próxima página uma solução direta da convergência de $\sum^{+\infty} a_n$

Como já vimos, $(|a_n|)$ é decrescente e portanto existe $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = L \in [0, +\infty)$.

Afirmação: $L = 0$. Verifiquemos: Sejam $p, n \in \mathbb{N}$ ambos arbitrários.

Escrevendo $\beta = 1 + \alpha$, de $-1 < \alpha < 0$ temos $0 < \beta < 1$ e

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{n+1-(1+\alpha)}{n+1} = 1 - \frac{\beta}{n+1}\,,$$

$$|\frac{a_{n+p}}{a_n}| = |\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}}\frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}}....\frac{a_{n+1}}{a_n}| = (1-\frac{\beta}{n+p})(1-\frac{\beta}{n+p-1})....(1-\frac{\beta}{n+1})\,,$$

$$(*) \qquad |\frac{a_{n+p}}{a_n}| \leq (1-\frac{\beta}{n+p})^p \leq (1-\frac{\beta}{n+p})^{n+p}(1-\frac{\beta}{n+p})^{-n}\,.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{a}{x})^x = e^a$, tomando o limite em (*) para $p \to +\infty$ (n fixo) temos,

$$\frac{L}{a_n} \leq e^{-\beta}\,, \forall n\,.$$

Donde, $0 \leq e^{\beta} L \leq \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$, o que implica $L = 0$ pois $e^{\beta} > 1$.

Finalmente, pelo critério de Leibnitz, $\sum\limits^{+\infty}(-1)^n|a_n| = \sum\limits^{+\infty} a_n$ é convergente $\blacksquare$