MAT220- Cálculo IV- IFUSP

Semestre 2 de 2009 - Professor Oswaldo Rio Branco

Raízes m-ésimas de um Número Complexo e da Unidade

Notação: Se $z = r\cos\theta + i\sin\theta$ dizemos que z tem forma polar $(r,\theta)_o$ e indicamos $z = (r,\theta)_o$.

1. Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Então,

   a) Existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\{z : z^m = 1\} = \{1, w, w^2, ..., w^{m-1}\}$. Dizemos que w é um gerador do conjunto das m raízes m-ésimas da unidade.

   b) Se z_1 é uma raiz m-ésima qualquer de $z \in \mathbb{C}^*$ e w é como no ítem (a) então $\{z_1, z_1 w, ..., z_1 w^{m-1}\}$ é o conjunto das m raízes m-ésimas de z.

   c) O complexo w no ítem (a) não é único.

   Demonstração:

   (a) Pelo Teorema 1.17 e Fórmula de Moivre, como $z = 1$ em forma polar $(1,0)_o$, o conjunto das m raízes m-ésimas de 1 é,

   $$\left\{w_k : w_k = \left(1, \frac{2k\pi}{m}\right)_o = (w_1)^k\,,\ k = 0,1,...,m-1\right\} = \left\{1\,, w_1\,, (w_1)^2\,, ...\,, (w_1)^{m-1}\right\}.$$

   (b) É claro que $\left(z_1 w^k\right)^m = (z_1)^m (w^k)^m = z(w^m)^k = z(1)^k = z$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Como por 1.17 z tem só m raízes m-ésimas, resta mostrar que o conjunto dado é de raízes distintas. Se $z_1 w^j = z_1 w^l$, $0 \leq j\,, l \leq m-1$, então $w^j = w^l$ e consequentemente $j = l$.

   (c) Se $w = \left(1, \frac{2\pi}{m}\right)_o$ é o gerador das m raízes m-ésimas de $z = 1$ então $\zeta = w^{m-1}$ também. De fato, temos $w^{m-1} = \left(1, \frac{2(m-1)\pi}{m}\right)_o = \left(1, 2\pi - \frac{2\pi}{m}\right)_o = \left(1, -\frac{2\pi}{m}\right)_o$. Consequentemente, $\zeta^k = (w^{m-1})^k$ tem forma polar $\left(1, -\frac{2k\pi}{m}\right)_o$ e assim,

   $$\zeta^k = \left(1, 2\pi - \frac{2k\pi}{m}\right)_o = \left(1, \frac{2(m-k)\pi}{m}\right)_o = w^{m-k}\ .$$

   Logo, $\left\{1, \zeta, \zeta^2, ..., \zeta^{m-1}\right\} = \left\{1, w^{m-1}, ..., w\right\}$ $\blacksquare$.

   Vide próxima página. É importante.

Comentários:

Façamos algumas observações como ilustração. Se $m = 3$ o conjunto das raízes cúbicas de 1 é $\{1, w = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)_o, w^2\}$ mas, pela fórmula de Moivre temos $w^3 = (1, 2\pi)_o$ e assim $w^3 = 1$ e, ainda, $w^4 = w^3 w = w$. Logo, $\{1, w^2, (w^2)^2\} = \{1, w, w^2\}$ e w^2 também é um gerador das raízes cúbicas de 1.

Se $m = 4$ temos $\{z : z^4 = 1\} = \{1, w = i = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)_o, w^2 = -1, w^3 = -i\}$ e evidentemente $w^2 = -1$ não é um gerador das raízes quartas da unidade. Mas $w^3 = -i$ é um gerador das raízes quartas da unidade pois, $\{1, -i, (-i)^2, (-i)^3\} = \{1, -i, -1, i\}$.

Se m é par e $w = \left(1, \frac{2\pi}{m}\right)_o$ é o gerador acima das raízes m-ésimas de 1 então w^2 gera apenas as $\frac{m}{2}$ raízes distintas $\{1, w^2, w^4, \ldots, w^{m-2}\}$.

Importante: As potências de $w = \left(1, \frac{2\pi}{m}\right)_o$, $1 = w^0, w, w^2, ...$, nesta ordem, percorrem os vértices, que são as raízes m-ésimas da unidade, de um polígono regular inscrito no círculo unitário no sentido anti-horário. Analogamente, as potências de $\zeta = w^{m-1}$ percorrem os vértices $1 = \zeta^0, \zeta, \zeta^2, ...$, nesta ordem, no sentido horário.

Comentário extra: Como multiplicação de raízes m-ésimas da unidade é uma raíz m-ésima da unidade, 1 é raíz m-ésima da unidade e o inverso de uma raíz m-ésima da unidade é uma raíz m-ésima da unidade, o conjunto das raízes m-ésimas da unidade é um **grupo multiplicativo** com m elementos.

Exercício: Se m é primo toda raíz da unidade $w \neq 1$ gera as m raízes da unidade.