Curso: MAT 220- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2011

(1) Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Mostre que

(a) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$.

Verificação:

Afirmação 1: Existe $\gamma = \limsup(x_n + y_n) \in \mathbb{R}$. Basta notar que $(x_n + y_n)$ é, obviamente, limitada e utilizar que toda sequência limitada admite $\limsup$ em $\mathbb{R}$.

Como γ é valor de aderência (o maior), existe subseq. $(x_{n_k} + y_{n_k})$ t.q. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} + y_{n_k} \to \gamma$.

Sendo (x_{n_k}), em particular, uma sequência limitada, ela contém uma subsequência convergente $(x_{n_{k_i}})$ e então indiquemos $\lim\limits_{i\to+\infty} x_{n_{k_i}} = \gamma_1$. Então, para este conjunto de índices $\{n_{k_1} < .... < n_{k_i} < ...\}$ a subsequência $(x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}})$ de $(x_{n_k} + y_{n_k})$ também converge a γ e portanto $(y_{n_{k_i}}) = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - (x_{n_{k_i}})$ é também convergente. Indiquemos $\gamma_2 = \lim\limits_{i\to+\infty} y_{n_{k_i}}$. Evidentemente temos $\gamma = \lim\limits_{i\to+\infty}(x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) = \lim\limits_{i\to+\infty} x_{n_{k_i}} + \lim\limits_{i\to+\infty} y_{n_{k_i}} = \gamma_1 + \gamma_2$.

Afirmação 2: $\gamma_1 \leq \limsup x_n$ e $\gamma_2 \leq \limsup y_n$. De fato, pois γ_1 e γ_2 são valores de aderência de (x_n) e (y_n) respectivamente.

Conclusão: $\limsup(x_n + y_n) = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \leq \limsup x_n + \limsup y_n$ ■

(2) Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, ...$ é convergente a 2.

Solução: Seja $x_1 = \sqrt{2}$. A equação $x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{x_n}}$ define a sequência (x_n) por recursão.

Afirmação 1: $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, é claro que $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$ e, supondo (hipótese indutiva) $x_n \leq 2$ temos $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$.

Afirmação 2: (x_n) é crescente. Basta provarmos $0 \leq \alpha \leq 2 \Rightarrow \alpha \leq \sqrt{2+\alpha}$. **Para** $\alpha \geq 0$ são válidas as equivalências que seguem

$$\alpha \leq \sqrt{2+\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 2+\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow |\alpha - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \in \left[-1\,,2\right] \Leftrightarrow \alpha \in [0,2].$$

Logo, a sequência é crescente.

Afirmação 3: $x_n \nearrow 2$. De fato, como a sequência é positiva crescente e limitada por 2 ela é então, pelo axioma do supremo, convergente e $\lim x_n = L \in [0,2]$. Temos então,

$$L = \lim x_{n+1} = \lim \sqrt{2+x_n} = \sqrt{\lim(2+x_n)} = \sqrt{2+\lim x_n} = \sqrt{2+L}$$

e portanto, $L^2 = 2+L$ e $0 = L^2 - L - 2 = (L-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ e $|L-\frac{1}{2}| + \frac{3}{2}$ e assim, $L = -1$ (que é uma solução descartável, pois o limite da sequência é positivo) ou $L = 2$ ■

(3) Estude com relação a convergência ou divergência

(a) $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \log k \ \log(\log k)}$

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{x \log x \ \log(\log x)}$, $x \geq e^2$ é positiva, contínua e decrescente e $f(k) = \frac{1}{k \log k \ \log(\log k)}$. Pelo Critério da Integral a série dada converge se e só se $\int_{10}^{+\infty} f(x)dx < \infty$. Porém, é fácil ver que a primitiva de $f = f(x)$ é $F(x) = \log[\log(\log x)]$ (isto é, $F' = f$) e assim,

$$\int_{10}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{10}^{N} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \log[\log(\log N)] - \log[\log(\log 10)] = +\infty \ ■$$

(4) Quais os valores de $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ tais que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha}$ é convergente ?

Solução: Se $\alpha \leq 1$, como $\log n > 0$, temos $\frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} \geq \frac{e^{\beta \log n}}{n} \geq \frac{1}{n}$ e a série dada diverge.

Se $\alpha > 1$, escrevendo $\alpha = \alpha_0 + \delta$, com $\alpha_0 > 1$ e $\delta > 0$, comparemo-la com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha_0}}$ $(< \infty)$. Pelo Critério da comparação no limite temos,

$$\frac{\frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha_0}}} = \frac{(\log n)^\beta}{n^\delta},$$

e, trocando para a variável contínua $t \in (0, +\infty)$, e escrevendo $x = \log t$ e $t = e^x$, obtemos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\delta} = \lim_{t \to +\infty} \frac{(\log t)^\beta}{t^\delta} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\delta x}} = 0,$$

pois é fácil ver, com a mudança $y = \delta x$ temos, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\delta x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(\frac{y}{\delta})^\beta}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\delta^\beta} \frac{y^\beta}{e^y} = 0$.

Conclusão: Diverge se $0 \leq \alpha \leq 1$ e converge se $\alpha > 1$ ■

(5) Determine (prove) se a série abaixo é convergente ou não:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \ -1 < \alpha < 0,$$

Os n fatores no numerador do termo geral da série (alternada) são negativos e,

$$a_n = (-1)^n |a_n| \quad ; \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} .$$

Procurando aplicar o critério de Raabe encontramos,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{n-\alpha}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}(\alpha+1) = \alpha+1 .$$

Pelo Critério de Raabe, sendo $\alpha+1<1$, $\sum^{+\infty} |a_n|$ é divergente.

Porém, sendo $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1$, pois $-\alpha < 1$, a sequência $(|a_n|)$ é também decrescente.

Assim, $(|a_n|)$ é decrescente e existe $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = L$.

Afirmação: $L = 0$. Verifiquemos:

Escrevendo $\beta = 1+\alpha$, de $-1<\alpha<0$ temos $0<\beta<1$ e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{n+1-(1+\alpha)}{n+1} = 1-\frac{\beta}{n+1} ,$$

$$\left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}}\frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1-\frac{\beta}{n+p}\right)\left(1-\frac{\beta}{n+p-1}\right)\cdots\left(1-\frac{\beta}{n+1}\right),$$

$$(*) \qquad \left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| \le \left(1-\frac{\beta}{n+p}\right)^p \le \left(1-\frac{\beta}{n+p}\right)^{p+n}\left(1-\frac{\beta}{n+p}\right)^{-n} .$$

Fixando n e tomando em (*) o limite para $p\to+\infty$ obtemos,

$$\frac{L}{a_n} \le e^{-\beta} .$$

Donde, $0 \le e^{\beta} L \le \lim a_n = L$, o que implica $L=0$ pois $e^{\beta}>1$.

Finalmente, pelo critério de Leibnitz, $\sum^{+\infty} (-1)^n |a_n| = \sum^{+\infty} a_n$ é convergente ∎

(6) (a) Determinar a relação entre $a, b \in \mathbb{R}$ para que sejam reais as raízes da equação:

$$(*) \qquad \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^m = a + ib\,, \; m \in \mathbb{N}^* \;.$$

(b) Valendo a relação em (a), resolva (*) supondo conhecido o argumento φ de $a + bi$.

Sugestão:

(a) Se $z = x \in \mathbb{R}$ então $i + z = x + i \neq 0$ e a divisão por $i + x$ é efetuável qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ e obteremos várias equações equivalentes a (*). Indiquemos por $\omega_\nu = \sqrt[m]{r}(p_\nu + iq_\nu)$, p_ν e q_ν reais, $1 \leq \nu \leq m$, $r = |a + ib|$, as m-raízes m-ésimas de $a + ib$.

Então,

$$\left(\tfrac{i-z}{i+z}\right)^m = a + ib \quad \Leftrightarrow \tfrac{i-x}{x+i} = \omega_\nu \Leftrightarrow (i - x) = \omega_\nu(x + i) \Leftrightarrow x(1 + \omega_\nu) = i(1 - \omega_\nu)\,,$$

e notemos que admitindo a existência da solução x temos $1 + \omega_\nu \neq 0$ pois $\omega_\nu = -1$ implica $\frac{i-x}{x+i} = -1$ e, então, $i = -i$ o que é impossível. Assim, continuando com as equações equivalentes,

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{i-z}{i+z}\right)^m = a + ib \quad &\Leftrightarrow x = i\tfrac{1-\omega_\nu}{1+\omega_\nu} \Leftrightarrow x = i\tfrac{1-\omega_\nu}{1+\omega_\nu}\tfrac{\overline{1+\omega_\nu}}{\overline{1+\omega_\nu}} \Leftrightarrow x = i\tfrac{(1-\omega_\nu)(1+\overline{\omega_\nu})}{|1+\omega_\nu|^2} \\ &\Leftrightarrow x = i\tfrac{1-2q_\nu i - |\omega_\nu|^2}{(1+p_\nu)^2 + q_\nu^2} \Leftrightarrow x = \tfrac{2q_\nu + i(1-|\omega_\nu|^2)}{(1+p_\nu)^2+q_\nu^2} \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{2q_\nu}{(1+p_\nu)^2 + q_\nu^2} \;+\; i\tfrac{1-|\omega_\nu|^2}{1+p_\nu)^2+q_\nu^2}\;.\end{aligned}$$

Logo, x é real se e só se $|\omega_\nu| = 1$ o que ocorre se e só se $a^2 + b^2 = 1$.

(b) Complete.

(7) Calcule a soma da série dada

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\alpha^n,\ 0 < \alpha < 1$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)^2}$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)....(n+p)}$.

Sugestões:

(a) Determine $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n(n+1)(n+2)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(b) Este exercício é um dos " mais belos" da lista. **Dê sentido** aos cômputos abaixo. Iisto é, verifique sob quais hipóteses valem os cálculos que seguem.

1 Sugestão

Multiplique por x as identidades $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$.

2 Sugestão:

A série é de termos positivos e podemos associá-la livremente. Façamo-lo na forma:

$$
\begin{aligned}
\sum n\alpha^n &= (\alpha + \ \alpha^2 + \ \alpha^3 + \ \alpha^4 + \ ....) \\
&+ (\alpha^2 + \ \alpha^3 + \ \alpha^4 + ...) \\
&+ (\alpha^3 + \ \alpha^4 + \ ....) \\
&+ (\alpha^4 + \ ......) \\
&= (\text{por quê?})\ \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha^3}{1-\alpha} + \ .... \ .
\end{aligned}
$$

(c) Vide página de respostas em 'Um Curso de Cálculo', H. L. Guidorizzi, vol 4, 5 ed.

(d) Existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)....(n+p)} = \frac{A}{n(n+1)(n+2)...(n+p-1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)...(n+p-1)(n+p)} \quad \blacksquare$$

(8) Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

(b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$.

(e) $\sum\limits^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Sugestão: Critério da Integral em ambos. Vide $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ no texto do curso.

(9) (L6) Sejam $z\,, w \in \mathbb{C}$, com $|z|\,, |w| \leq 1$ e $z + w = 1$. Mostre que $|z + w^2| \leq 1$.

Comentário: Resultados como este são importantes para identicarmos condições em que temos a continuidade dde uma função definida como uma série de potências em um ponto da fronteira do disco de convergência. Alguns destes resultados para séries de potências devem-se a Abel e são às vezes chamados de ´‘resultados oculares" ou até "do olho".

Resolução: (Talvez não a melhor).

Escrevendo $z = x + iy$ e $w = 1 - z = (1 - x) - iy$ temos,

$$\begin{cases} |z| \leq 1 \iff \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ |w| \leq 1 \iff (1-x)^2 + y^2 \leq 1 \quad \iff \quad x^2 + y^2 \leq 2x \ . \end{cases}$$

A 1 inequação do sistema acima descreve o círculo de raio 1 centrado na origem e a 2 inequação representa o círculo de raio 1 centrado no ponto $(1, 0)$. A região composta pelos pontos satisfazendo ambas as inequações é também chamada uma "luna". Portanto, um método seguro de solução é passarmos para as variáveis cartesiana a função

$$|z + w^2|^2 = |z + (1 - z)^2|^2 \ ,$$

e determinarmos o seu máximo sobre a luna, que é um compacto. Assim procedendo temos $w^2 = [(1-x)^2 - y^2] \; - \; 2y(1-x)i$ e definimos

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) \qquad &= \; [x + (1-x)^2 - y^2]^2 \; + \; [y - 2y(1-x)]^2 \\ &= [(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} - y^2]^2 \; + \; 4y^2(x - \tfrac{1}{2})^2 \\ &= \Big[\big(x - \tfrac{1}{2}\big)^2 + y^2\Big]^2 + \tfrac{3}{2}\Big[\big(x - \tfrac{1}{2}\big)^2 - y^2\Big] + \tfrac{9}{16}. \end{aligned}$$

Verifique (é elementar e necessário) que o único ponto crítico de φ é $P = (\frac{1}{2}, 0)$, o qual pertence ao interior da luna [desenhe-a e **identifique** tal ponto], e que $\varphi(\frac{1}{2}, 0) = \frac{9}{16}$.

Determine agora o máximo e o mínimo na fronteira. Note que o trecho, desta fronteira, contido na circunferência de raio 1 admite a parametrização

$$J = \Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\Big] \ni y \mapsto x = +\sqrt{1-y^2} \;,$$

e identifique o máximo de $\psi_1(y) = \varphi\big(\sqrt{1-y^2}\,, y\big)$, $y \in J$.

O outro trecho admite a parametrização

$$J = \Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\Big] \ni y \mapsto x = 1 - \sqrt{1-y^2} \;,$$

e então ache máximo de $\psi_2(y) = \varphi\big(1 - \sqrt{1-y^2}\,, y\big)$, $y \in J$ $\quad$ [**Dica:** $\psi_1(y) = \psi_2(y)$] ∎

(10) Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n \ + \ n^2}{n^4}$

(b) $\sum\limits^{+\infty} n^2(1 - \cos \frac{1}{n^2})$

(h) $\sum\limits^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$.

Sugestões:

(a) Parcele como soma de duas séries **ou** compare a série dada com $\sum \frac{1}{n^2}$.

(b) (1) Pela expansão em séries de potências para $\cos x$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Compare, no limite, a série dada com $\sum\limits^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. A comparação é factível sem o uso da função $|\,.\,|$. Por quê?

(2) De $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ temos $1 - \cos\frac{1}{n^2} = 2\sin^2\frac{1}{2n^2}$. Desta forma, $\sum\limits^{+\infty} 2n^2 \sin^2(\frac{1}{2n^2})$ é, pelo 1 Lim. Fundamental, comparável com $\sum\limits^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$.

(h) Mostre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e compare a série dada com uma apropriada e simples ■

(11) Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(f) $\sum\limits^{+\infty} \frac{n!}{3.5.7.....(2n+1)}$.

Sugestão: $3.5.7.....(2n+1) > 2^n n!$.

(12) Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(b) $\sum^{+\infty} \frac{n^{n-p}}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5....(2n+1)}{4.6.8....(2n+4)}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}}$.

Sugestões:

(a) Critério da razão.

(b) Idem.

(c) Critério de Raabe.

(d) Idem.

(13) Nos exercícios abaixo determine se a série $\sum^{+\infty} a_n$ é convergente ou divergente. No caso de convergêcia, verifique se a convergência é absoluta ou condicional.

(b) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n-3}{10n+4}$.

Sugestão:

(b) Analize $\lim_{n \to +\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-3}{10n+4}$.

(14) Mostre que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, $x \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, satisfaz,

(a) Se $\alpha \geq 0$, converge (absolutamente) se somente se $x \in [-1,1]$.

(b) Se $-1 < \alpha < 0$, converge se somente se $x \in (-1,1]$ e condicionalmente se $x = 1$.

(c) Se $\alpha \leq -1$, converge se e somente se $x \in (-1,1)$.

Sugestão:

Inicialmente, verifique pelo teste da razão que o raio de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ é $r = ...$ (qualquer que seja α real e não natural).

(a) Vide Exemplo 3.38 pg. 48 nas notas postadas na página eletrônica.

(b) Se $\alpha < 0$, pelo Exemplo 3.38 a série binomial não converge absolutamente nos extremos. Verifique que se $\alpha < 0$, a série binomial, em $x = -1$, não é alternada. Se $-1 < \alpha < 0$ a série binomial, em $x = 1$, é condicionalmente convergente: vide exemplo 3.49, pg 52, notas do curso na página eletrônica, e também gabarito da P1.

(c) Se $\alpha < -1$ verifique que o termo geral das séries binomiais ns extremos $x = \pm 1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$ não tendem a zero pois a fração $\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right|$ é maior que ...

(15) Mostre que é divergente a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n! e^n}$.

Solução. Se a_n é o termo geral da série temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, e^{n+1}} \frac{n!\, e^n}{n^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \ .$$

O teste da razão é ineficiente neste caso.

Para aplicar o teste de Raabe notemos que

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} = \frac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{e}.$$

Logo,

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{e}{n}} \ .$$

Computemos, pela regra de L'Hospital, o limite abaixo (note que podemos):

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e-(1+\frac{1}{x})^x}{\frac{e}{x}} \ .$$

Observe que se $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}$ então,

$$f'(x) = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = (1+\frac{1}{x})^x\left[\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right] .$$

Assim, o limite procurado é

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{-(1+\frac{1}{x})^x\left[\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right]}{-\frac{e}{x^2}} \ .$$

Simplifiquemos tal cômputo notando que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})^x}{e} = 1 \ .$$

Assim, o limite procurado é:

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} \ .$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA

Aplicando a regra de L'Hospital (note que podemos) encontramos

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\frac{x^3}{2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2(x+1)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2} .$$

Então, como $\frac{1}{2} < 1$, pelo Critério de Raabe a série dada **diverge** ■

(16) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| < 1$ e $\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ uma parametrização positiva (i.e, no sentido anti-horário) de S^1. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha} dz = 2\pi i \ .$$

Atenção: É fácil ver que (verifique) $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

Façamos duas provas que não utilizam a Fórmula Interal de Cauchy.

1 Prova. Se $z \in S^1$ a série geométrica

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1/z}{1-\frac{\alpha}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{z^{n+1}}$$

converge uniformemente sobre S^1. Logo,

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha} dz \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_\gamma \frac{dz}{z^{n+1}} \right) \alpha^n \ .$$

Como $\frac{1}{z^{n+1}}$ admite primitiva $(\frac{z^{-n}}{-n})$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, se $n \geq 1$, segue que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^{n+1}} \ = \ 0 \, , \ \text{se } n \geq 1 \ .$$

Logo,

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha} dz \ = \ 2\pi i \ .$$

2 Prova. Por um argumento semelhante ao utilizado na demonstração da Fórmula Integral de Cauchy 10.23 (**vide Figura Ilustrativa a tal resultado**) temos, para $r > 0$ e r suficientemente pequeno,

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z-\alpha} \ = = \ \int_{|z-\alpha|=r} \frac{dz}{z-\alpha} \ = \int_{|w|=r} \frac{dw}{w} \ = \ 2\pi i \ \blacksquare$$