1ª PROVA DE CÁLCULO III - IFUSP - MAT216

31 de março, 2014

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

Nome : ____

NºUSP : ____

Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Escolha 5 questões entre as 7 questões.
Justifique todas as passagens
BOA SORTE!

1. Considere o campo
$$\overrightarrow{g}(x,y) = f(\|\overrightarrow{r}\|)\overrightarrow{r},$$
onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função infinitamente derivável, com $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ de norma $\|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Compute o rotacional de $\overrightarrow{g}$.

2. Considere o campo

$$\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y)\,\overrightarrow{j} = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{j}\,,\ \text{onde } (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Compute $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, para $(x,y) \neq (0,0)$. Vale a igualdade destas derivadas parciais?

(b) Compute

$$\int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt,\ \text{onde } \gamma(t) = (\cos t\,, \sin t) \text{ para } t \text{ em } [0, 2\pi].$$

(c) Defina um campo conservativo.

(d) O campo $\overrightarrow{F}$ é conservativo ? Por quê?

3. Estude com relação a máximos e mínimos locais e pontos de sela a função

$$F(x, y, z) = \frac{x^5}{5} + y^4 + z^4 - \frac{x^3}{3} - 2y^2.$$

4. Considere

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 = 1\}.$$

(a) Justifique que M é compacto.

(b) Encontre os pontos de M mais próximos da origem,

(c) Encntre os pontos de M mais distantes da origem.

5. (a) Esboce a região $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1 \text{ com } x \geq 0, y \geq \text{ e } z \geq 0\}$.
A regi]ao M é compacta? Justifique.

(b) Determine o valor máximo de

$$F(x, y, z) = xyz, \text{ sob a condição } x + y + z = 1, \text{ com } x > 0, y > 0 \text{ e } z > 0.$$

(c) Prove a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}, \text{ quaisquer que sejam } a > 0, b > 0 \text{ e } c > 0.$$

6. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por,

$$F(x, y) = (u, v) \text{ com } (u, v) = (x^2 + y^3, x^3 + y^2).$$

(a) Mostre que F é inversível em uma vizinhança do ponto $(1, 1)$ [isto é, em um aberto que contém o ponto $(1, 1)$] e que sua função inversa $G = G(u, v)$ é de classe C^1 numa vizinhança do ponto $F(1, 1) = (u_0, v_0)$. Determine (u_0, v_0).

(b) Determine a derivada parcial $\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0)$.

7. (a) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

   (b) Enuncie o Teorema da Função Implícita para uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

   (c) Utilizando o teorema enunciado em (a), prove o teorema enunciado em (b).