

LISTA 5 DE EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x, y) = 1$, para todo $(x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$. Prove que

$$\iint_R f(x, y) dx dy = (b - a)(d - c).$$

2. Seja $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap R \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap R. \end{cases}$$

Determine se f é integrável ou não. Se f é integrável, compute sua integral.

3. Prove, a partir da definição de integral dupla e da teoria da integração em \mathbb{R} ,

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} x dx dy = \frac{(b^2 - a^2)}{2} (d - c) = (d - c) \int_a^b x dx.$$

4. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e positivas. Prove, a partir da definição de integral dupla e da teoria da integração em \mathbb{R} , que fg é integrável e

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right).$$

- 5*. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, com ∂A de conteúdo nulo. Mostre as afirmações abaixo.

- (i) A restrição de f ao aberto $\text{int}(A)$, denotada por $f|_{\text{int}(A)} : \text{int}(A) \rightarrow \mathbb{R}$, e que abusando da notação indicamos apenas por f , é integrável e

$$\iint_{\text{int}(A)} f dx dy = \iint_A f dx dy.$$

- (ii) Consideremos $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão limitada qualquer de f ao compacto \bar{A} . Então, \bar{f} é integrável e

$$\iint_{\bar{A}} \bar{f} dx dy = \iint_A f dx dy.$$

Dica. Utilize resultados nas notas de aulas.

6. Seja $F : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e $C \subset R$ tal que C tem conteúdo nulo. Seja $G : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada tal que $G \equiv F$ em $R \setminus C$. Mostre que G é integrável e

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} G dx dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} F dx dy.$$

Dica. Aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

7. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e A um subconjunto limitado do plano com fronteira de conteúdo nulo. Mostre que f é integrável.

Dica. Aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

8. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Mostre que $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$\left| \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| dx dy.$$

Dica. Aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

Estes exercícios estão em **Um Curso de Cálculo, H. L. Guidorizzi, Vol 3, 5ª ed.**

Seção 3.1 (Integral Dupla e Teorema de Fubini), pp. 71-74:

1. b), d), f), h), j) e m).
3. b), d) e f).
4. b), d) e f).
5. b), d), f) e h).
6. b), d), f), h), j), m), o) e q).
7. b), d), f), h), j), m), o), q) e s).
8. b), d), f), h), j), m) e o).
9. b) e d).

Seção 4.2 (Mudança de Variáveis), pp. 98-100:

1. b), d), e), f), g), i) e l).
2. a), c), e) e g).
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.