OS TEOREMAS DA FUNÇÃO IMPLÍCITA E DA FUNÇÃO INVERSA: PROVAS FÁCEIS

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

Extraído de "The Implicit and The Inverse Function Theorems: Easy Proofs"

a ser publicado em Real Analysis Exchange Vol. 39(1), 2013/2014, pp. 229-240

Vide arXiv:1212.2066, 2012 (basta digitar o título do artigo em inglês no Google)

Notações e Preliminares.

Assumimos, nas provas dos teoremas que seguem, os resultados abaixo.

- (TVI) Teorema do Valor Intermediário.
- (TVM) Teorema do Valor Médio em Várias Variáveis.
- Regra da Cadeia.

Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{f_1, \ldots, f_m\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Seja Ω um aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$. Dada uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, escrevemos $F = (F_1, \ldots, F_m)$ onde $F_i : \Omega \to \mathbb{R}$ é a i-ésima componente de F para cada $i = 1, \ldots, m$. Dizemos que F é de classe C^1 se F e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em Ω. Notação: $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Denotamos o determinante de uma matriz quadrada M por $\det M$.

Lema 1. *Seja F em $C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n$, e p em Ω tal que $\det JF(p) \neq 0$. Então, F restrita a alguma bola $B(p; r)$, com $r > 0$, é injetora.*

Prova.

A função F é de classe C^1, a função determinante $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é contínua e $\det JF(p) = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right) \neq 0$. Logo, existe $r > 0$ tal que $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\xi_{ij})\right)$ não se anula, para quaisquer pontos ξ_{ij} na bola $B(p; r)$, onde $1 \leq i, j \leq n$.

Sejam a e b distintos em $B(p; r)$. Dado $i = 1, \ldots, n$, pelo TVM existe um ponto c_i no segmento $\overline{ab}$ tal que $F_i(b) - F_i(a) = \langle \nabla F_i(c_i), b - a \rangle$. Donde,

$$\begin{pmatrix} F_1(b) - F_1(a) \\ \vdots \\ F_n(b) - F_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(c_1) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(c_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(c_n) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(c_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Como $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_i)\right) \neq 0$ e $b - a \neq 0$, deduzimos $F(b) \neq F(a)$∎

Os Teoremas da Função Implícita e da Função Inversa.

Iniciemos com uma equação escalar. Seja (x,y) a variável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 1. *Sejam F em $C^1(\Omega;\mathbb{R})$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, e um ponto (a,b) em Ω tal que $F(a,b)=0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)>0$. Existem um aberto X, contido em $\mathbb{R}^n$ e contendo a, e um aberto Y, contido em $\mathbb{R}$ e contendo b, satisfazendo o que segue.*

- *Para cada x em X, existe um único $y=f(x)$ em Y tal que $F\big(x,f(x)\big)=0$.*
- *Temos $f(a)=b$. Ainda mais, $f: X\to Y$ é de classe C^1 e*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}, \quad \textit{para todo } x \textit{ em } X, \ \textit{onde } j=1,\ldots,n.$$

Prova. Dividamos a prova em três partes.

◇ Existência e Unicidade. Por continuidade, existe um paralelepípedo não degenerado $(n+1)$-dimensional $X'\times[b_1,b_2]$, centrado em (a,b) e contido em Ω, com arestas paralelas aos eixos coordenados tal que $\frac{\partial F}{\partial y}>0$ sobre $X'\times[b_1,b_2]$. A função $F(a,y)$, com y variando em $[b_1,b_2]$, é estritamente crescente e $F(a,b)=0$. Logo, $F(a,b_1)<0$ e $F(a,b_2)>0$. Como F é contínua, existe um paralelepípedo aberto n-dimensional X, centrado em a e contido em X', com arestas paralelas aos eixos tal que para todo x em X temos $F(x,b_1)<0$ e $F(x,b_2)>0$. Fixando x em X e aplicando o TVI à função estritamente crescente $F(x,y)$, com y variando em $[b_1,b_2]$, obtemos um único $y=f(x)$ no intervalo aberto $Y=(b_1,b_2)$ tal que $F(x,f(x))=0$.

◇ Continuidade. Sejam $\overline{b_1}$ e $\overline{b_2}$ tais que $b_1<\overline{b_1}<b<\overline{b_2}<b_2$. Pelo visto acima, existe um aberto X'', contido em X e contendo a, tal que $f(x)$ está no intervalo aberto $(\overline{b_1},\overline{b_2})$, para todo x em X''. Logo, f é contínua em $x=a$. Agora, dado a' em X, seja $b'=f(a')$. Então, $f: X\to Y$ é uma solução do problema $F(x,h(x))=0$, para todo x in X, com a condição $h(a')=b'$. Assim, pelo que acabamos de mostrar, f é contínua em a'.

◇ **Diferenciabilidade.** Dado x em X, seja e_j o j-ésimo vetor canônico em $\mathbb{R}^n$ e $t \neq 0$ pequeno o suficiente tal que $x + te_j$ pertence a X. Para $P = \big(x, f(x)\big)$ e $Q = \big(x + te_j, f(x + te_j)\big)$, temos $F(P) = F(Q) = 0$. Pelo teorema do valor médio existe $(\overline{x}, \overline{y})$ no segmento $\overline{PQ}$ [contido em $X \times Y$] tal que

$$\begin{aligned} 0 &= F\big(x + te_j, f(x + te_j)\big) - F\big(x, f(x)\big) = \\ &= \tfrac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{y})t + \tfrac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})[f(x + te^j) - f(x)]. \end{aligned}$$

Sabidamente $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são contínuas, com $\frac{\partial F}{\partial y}$ não se anulando em $X \times (b_1, b_2)$, f é contínua e $(\overline{x}, \overline{y}) \to (x, f(x))$ se $t \to 0$. Logo,

$$\frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})} \to -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \text{ se } t \to 0.$$

Isto prova a fórmula desejada para $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ e mostra que f é de classe C^1■

A seguir, provemos a forma geral do teorema da função implícita. Indiquemos

$$\begin{cases} x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \\ y' = (y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}, \\ y = (y_1; y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \\ (x_1, \ldots x_n; y_1, \ldots, y_m) = (x; y) = (x; y_1; y'). \end{cases}$$

Dada $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ diferenciável, Ω aberto em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, pomos $F = (F_1, \ldots, F_m)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \Big(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\Big)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}.$$

Teorema 2 (Teorema da Função Implícita). *Seja F em $C^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$, com Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, e (a,b) um ponto em Ω tal que $F(a,b)=0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ é inversível. Então, existe um aberto X, contido em $\mathbb{R}^n$ e contendo a, e um conjunto aberto Y, contido em $\mathbb{R}^m$ e contendo b, satisfazendo o que segue.*

- *Para cada x em X, existe um único $y=f(x)$ em Y tal que $F\big(x,f(x)\big)=0$.*
- *Temos $f(a)=b$. Ainda mais, $f:X\to Y$ é de classe C^1 e*

$$Jf(x)=-\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\right]^{-1}_{m\times m}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))\right]_{m\times n},\ \textit{para todo } x \textit{ em } X.$$

Prova. Dividamos a prova em quatro partes.

◇ Achando Y. Definindo $\Phi(x,y)=\big(x,F(x,y)\big)$, para (x,y) em Ω, temos

$$\det J\Phi=\det\left(\begin{array}{c|c} I & 0\\ \hline \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{array}\right)=\det\frac{\partial F}{\partial y},$$

com I a matriz identidade de ordem n e 0 a matriz nula de tamanho $n\times m$. Logo, $\det J\Phi(a,b)\neq 0$. Encolhendo Ω, se preciso, pelo Lema 1 assumimos que Φ é injetora e $\Omega=X'\times Y$, um aberto em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ que contém (a,b).

◇ Existência e diferenciabilidade. Provemos, por indução em m, que o sistema

$$\begin{cases} F_1(x;y_1,\ldots,y_m)=0,\\ F_2(x;y_1,\ldots,y_m)=0,\\ \qquad\vdots\\ F_m(x;y_1,\ldots,y_m)=0,\end{cases}\quad\text{com as condições}\quad\begin{cases} y_1(a)=b_1\\ y_2(a)=b_2\\ \quad\vdots\\ y_m(a)=b_m,\end{cases}$$

tem uma solução $y=f(x)$ de classe C^1 em algum aberto contendo a.

O caso $m=1$ já foi feito. Admitamos o resultado válido para $m-1$.

No caso m, pomos $\mathcal{F}=(F_2,\ldots,F_m)$. Consideremos a matriz $M=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ e a bijeção linear associada $\mathcal{M}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$. Pela regra da cadeia, a função

$$G(x;z)=F[x;b+\mathcal{M}^{-1}(z-b)],$$

definida num aberto contendo (a,b), satisfaz $\frac{\partial G}{\partial z}(a;b)=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)M^{-1}=MM^{-1}$ e $G(a;b)=0$. Logo, podemos supor que M é a matriz identidade.

Agora, vejamos a equação $F_1(x;y_1;y') = 0$, onde x e y' são variáveis independentes e y_1 é a variável dependente, sujeita à condição $y_1(a;b') = b_1$. Como $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a;b_1;b') = 1$, pelo Teorema 1 existe uma função $\varphi(x;y')$ de classe C^1 em algum aberto contendo $(a;b')$ e satisfazendo

$$F_1[x;\varphi(x;y');y'] = 0 \text{ e a condição } \varphi(a;b') = b_1.$$

Destaquemos que $\mathcal{F}[a;\varphi(a;b');b'] = \mathcal{F}(a;b) = 0 \in \mathbb{R}^{m-1}$.

A seguir, substituindo $y_1 = \varphi(x;y')$ em $\mathcal{F}(x;y_1;y') = 0$, resolvamos o sistema

$$\begin{cases} F_2(x;\varphi(x;y');y') = 0 \\ \qquad\vdots \\ F_m(x;\varphi(x;y');y') = 0 \end{cases}, \quad \text{com a condição } \; y'(a) = b'.$$

Diferenciando $\mathcal{F}[x;\varphi(x;y');y']$, com respeito às variáveis $y_2,\ldots,y_m$, temos

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(a;b)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a;b') + \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b) = \; 0 + \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b), \text{ onde } 2 \le i,j \le m.$$

A matriz $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b)\right)$, onde $2 \le i,j \le m$, é a identidade de ordem $m-1$. Assim, graças à hipótese de indução, existe um função ψ de classe C^1 em algum aberto X contendo o ponto a e satisfazendo

$$\mathcal{F}\big[x;\varphi\big(x;\psi(x)\big);\psi(x)\big] = 0, \text{ para todo } x \text{ em } X, \text{e a condição } \psi(a) = b'.$$

Também temos $F_1\big[x;\varphi\big(x;\psi(x)\big);\psi(x)\big] = 0$, para todo x em X. Definindo

$$f(x) = \big(\varphi(x;\psi(x));\psi(x)\big), \text{ para } x \text{ em } X,$$

temos $F[x;f(x)] = 0$, para todo x em X, e $f(a) = \big(\varphi(a;b');b'\big) = (b_1;b') = b$, onde f é de classe C^1 em X.

- Fórmula de Diferenciação. Diferenciando $F[x,f(x)] = 0$ obtemos

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0, \quad \text{com } 1 \le i \le m \text{ e } 1 \le k \le n.$$

Em forma matricial, escrevemos $\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,f(x)\big) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(x,f(x)\big)Jf(x) = 0$.

- Unicidade. Seja g satisfazendo $F\big(x,g(x)\big) = 0$, para todo x em X, e $g(a) = b$. Dado x em X deduzimos $\Phi\big(x,g(x)\big) = \big(x,F(x,g(x)\big) = (x,0) = \Phi\big(x,f(x)\big)$. A injetividade de Φ implica $g(x) = f(x)$, para todo x em X■

Obs. *Localmente, em $(a;b)$, a superfície de nível 0 de F é o gráfico de f. Isto é,*

$$\{(x,y) \in X \times Y : F(x,y) = 0\} = Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Prova. *Imediata* ■

Teorema 3 (Teorema da Função Inversa). *Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 e p em Ω tal que $JF(p)$ é inversível. Existem um aberto X contendo p, um aberto Y contendo $F(p)$, e uma função $G : Y \to X$ de classe C^1 satisfazendo $F(G(y)) = y$, para todo y em Y, e $G(F(x)) = x$, para todo x em X. Ainda mais,*

$$JG(y) = JF(G(y))^{-1}, \text{ para todo } y \text{ em } Y.$$

Prova.

- Existência. *Pelo Lema 1 podemos supor F injetora. A função*

  $$\Phi(x,y) = F(x) - y, \text{ para } (x,y) \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

  é de classe C^1, com $\Phi(p, F(p)) = 0$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(p, F(p)) = JF(p)$. O Teorema da Função Implícita garante um aberto Y contendo $F(p)$ e uma $G : Y \to \Omega$ de classe C^1 tal que $\Phi(G(y), y) = F(G(y)) - y = 0$, para todo y em Y. Donde

  $$F(G(y)) = y, \text{ para todo } y \text{ em } Y.$$

  Logo, G é bijetora de Y em $X = G(Y)$ e F é bijetora de X em Y. Também temos $X = F^{-1}(Y)$. Sendo F contínua, X é um aberto contendo p.

- Fórmula de diferenciação. *Pela regra da cadeia,*

  $$JG(F(y))JG(y) = I, \text{ com } I \text{ a matriz identidade } m \times m \blacksquare$$

Mostremos a importância de algumas hipóteses em Teorema 1 e Teorema 3.

Contra-exemplos. *Consideremos a função* $F(x,y) = x - f(y)$, *para todo* (x,y) *no plano, com* $f(y) = \frac{y}{2} + y^2 \sin\frac{1}{y}$, *se* $y \neq 0$, *e* $f(0) = 0$.

Algumas observações. *Temos* $f'(y) = 1/2 + 2y\sin(1/y) - \cos(1/y)$, *se* $y \neq 0$, *e* $f'(0) = 1/2$. *Donde,* F *is diferenciável,* $F(0,0) = 0$ *e* $(\partial F/\partial y)(0,0) \neq 0$. *Ainda, fixado* x *em* $\mathbb{R}$, *claramente* $\frac{\partial F}{\partial y}(x, \frac{1}{k\pi}) = -f'(\frac{1}{k\pi}) = -1/2 + (-1)^k$ *alterna sinais, conforme* k *assume os valores* $1, 2, \ldots$, *e portanto, pela* teorema do valor intermediário para derivadas (propriedade de Darboux), *toda vizinhança de* $(0,0)$ *contém um ponto no qual* $\partial F/\partial y$ *se anula. Ainda mais, dada qualquer vizinhança* V *de* 0 *na reta,* f *não é monótona em* V *e* f' *se anula em algum ponto em* V. *Assim,* f' *não é contínua na origem.*

Suponhamos que uma função g *satisfaz* $F(x, g(x)) = x - f(g(x)) = 0$, *para todo* x *em um intervalo aberto* V *centrado em* 0, *e* $g(0) = 0$. *Então, vale o seguinte.*

- ◇ *A função* g *não é contínua (nem diferenciável). Caso contrário,* g *é contínua e pela identidade* $f(g(x)) = x$, *para todo* x *em* V, *segue que* g *é injetora. Donde,* g *é estritamente monótona e* $g(V)$ *é vizinhança da origem. Assim,* f *restrita a* $g(V)$ *é monótona, contradizendo as observações iniciais.*

- ◇ *A função* g *não é unicamente definida. De fato, como a função contínua* f *não é monótona em nenhuma vizinhança da origem, segue que* f *não é injetora em tais vizinhanças. Portanto, a equação* $x = f(y)$ *não define* y *unicamente como uma função de* x *em nenhuma vizinhança da origem.*

- ◇ *A função* f *é diferenciável, com* $f'(0) \neq 0$ *e não é monótona em nenhuma vizinhança de* 0. *Logo,* f *não é inversível em nenhuma vizinhança de* 0■

Exemplo 1. *(Vide Knapp [5]). Consideremos o sistema não linear com duas equações e quatro variáveis x, y, w, e z,*

$$\begin{cases} xz^3 + y^3w^2 + 2xy & = 0 \\ xywz - 1 & = 0. \end{cases}$$

Tratemos x e y como variáveis independentes e as variáveis w e z como funções nas variáveis x e y. Então, considerando a função

$$F(x,y,w,z) = \left(xz^3 + y^3w^2 + 2xy, xywz - 1\right),$$

determinemos, se possível, as derivadas parciais da função em duas variáveis $f(x,y) = \big(w(x,y), z(x,y)\big)$ que satisfaz a equação

$$F\big(x, y, f(x,y)\big) = (0,0).$$

Pela regra da cadeia temos, utilizando matrizes jacobianas,

$$\begin{bmatrix} z^3 + 2y & 3y^2w^2 + 2x & 2y^3w & 3xz^2 \\ ywz & xwz & xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e obtemos

$$\begin{bmatrix} z^3 + 2y & 3y^2w^2 + 2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde segue,

$$(E1.1) \qquad \begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z^3 + 2y & 3y^2w^2 + 2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix}.$$

Estas última equação matricial nos permite obter as derivadas parciais de $w(x,y)$ e $z(x,y)$ nos pontos (x,y,w,z) que satisfazem

$$\begin{vmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{vmatrix} \neq 0,$$

e em tais pontos obtemos

$$(E1.2) \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix}.$$

Ainda mais, indicando F segundo suas funções componentes,

$$F = (F_1, F_2) \ \text{ com } F_1(x,y,w,z) = \ xz^3 + y^3w^2 + 2xy \ \text{ e } \ F_2(x,y,w,z) = xywz - 1\,,$$

reescrevemos a equação (E1.2) como

$$(E1.3) \qquad Jf \ = \ - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial w} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}, \ \text{ com } Jf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Assim, $-Jf$ é o produto da inversa da matriz das derivadas parciais de F em relação às variáveis dependentes w e z, nesta ordem, pela matriz das derivadas parciais de F em relação às váriaveis independentes x e y, nesta ordem■

REFERÊNCIAS

1. *T. M. Apostol, Mathematical Analysis - A Modern Approach to Advanced Calculus, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957.*

2. *G. A. Bliss, A new proof of the existence theorem for implicit functions,* Bulletin of the American Mathematical Society ***18*** *No. 4 (1912) 175–179.*

3. *de Oliveira, O. R. B., The implicit and the inverse function theorems: easy proofs. To appear in Real Analysis Exchange. See arXiv:1212.2066, 2012*

4. *U. Dini, Lezione di Analisi Infinitesimale, volume 1, Pisa, 1907, 197–241.*

5. *P. M. Fitzpatrick, Advanced Calculus, 2nd ed., Pure and Applied Undergraduate Texts vol. 5, American Mathematical Society, Providence, 2009.*

6. *Guidorizzi, H. L., Um Curso de Cálculo, Vol 2, 5 ed., Editora LTC.*

7. *A. W. Knapp, Basic Real Analysis, Birkhäuser, Boston, 2005.*

8. *S. G. Krantz and H. R. Parks, The Implicit Function Theorem - History, Theory, and Applications, Birkhaüser, Boston, 2002.*

9. Lima, Elon, *Curso de Análise, Vol 2, 11 ed., IMPA.*

10. *W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd. ed., McGraw-Hill, Beijing, China, 1976.*

11. *M. Spivak, Calculus on Manifolds, Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, 1965.*

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo
Rua do Matão 1010 - CEP 05508-090
São Paulo, SP - Brasil
oliveira@ime.usp.br