MAT 216 - CÁLCULO III - IFUSP

Primeiro semestre de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

TRÊS TEOREMAS DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS - INTRODUÇÃO E EXEMPLOS

O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Motivação. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Objetivamos encontrar condições em que dada a equação $f(x,y) = 0$ podemos explicitar y como função da variável x, para x em algum intervalo aberto. Isto é, determinemos uma função $y = g(x)$ tal que $f\big(x, g(x)\big) = 0$ para todo ponto $x \in \mathrm{Dom}(g) = (a,b) \subset \mathbb{R}$, onde $a \neq b$. Ainda mais, assegurada a existência de uma tal função g desejamos identificar sob quais hipóteses podemos concluir, para g, sua unicidade ou continuidade ou diferenciabilidade.

Definição. Uma função $y = g(x)$ está definida implicitamente pela equação $f(x,y) = 0$ se $f\big(x, g(x)\big) = 0$, para todo $x \in \mathrm{Dom}(g)$. Diz-se também que $y = g(x)$ é solução implícita de $f(x,y) = 0$. Analogamente, para $x = h(y)$.

Exemplo 1. A equação $x^2 + y^2 = 1$ define a circunferência no plano, de raio 1 e centrada na origem, denotada S^1.

As funções $g_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$, onde $x \in (-1,+1)$, e $g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$, onde $x \in (-1,+1)$, são soluções implícitas da equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Os gráficos de g_1 e g_2 são, respectivamente, o hemisfério superior e o hemisfério inferior:

$$H^+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\} \quad \text{e} \quad H^- = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\},$$

de S^1, subtraídos de ambos os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$.

Se $(x_0, y_0) \in H^+$ e $y_0 > 0$, então a função $g_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$ com $x \in (-1,+1)$ é, entre as soluções da equação $x^2 + y^2 = 1$, uma solução tal que $g_1(x_0) = y_0$.

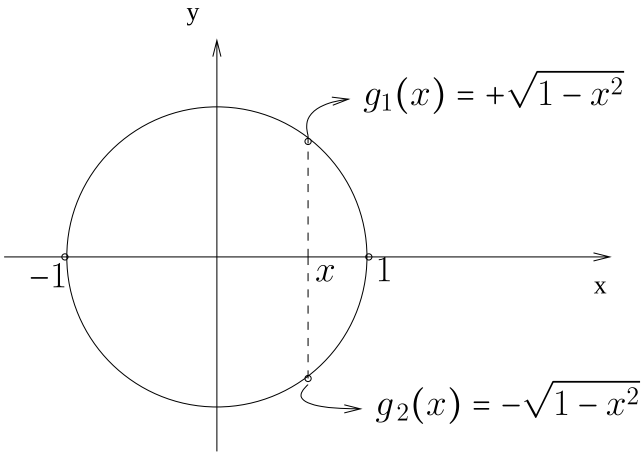

Figura 1: Soluções implicítas da equação $x^2 + y^2 = 1$, se $x \in (-1, +1)$

Analogamente, se $(x_0, y_0) \in H^-$ e $y_0 < 0$, então a função $g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ onde $x \in (-1, 1)$, é solução de $f(x, y) = 0$ tal que $g_2(x_0) = y_0$. Vide Figura 1.

Logo, se $(x_0, y_0) \in S^1$ é tal que $y_0 < 0$ ou $y_0 > 0$ determinamos uma função $y = g(x)$ definida em um intervalo I, aberto e contendo x_0, tal que

$$\begin{cases} f\big(x, g(x)\big) = 0\,, \text{ para todo } x \in I\,, \text{ onde } x_0 \in I\,, \\ g(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Neste caso, o domínio maximal de g é o intervalo aberto $I = (-1, 1)$.

Se $(x_0, y_0) = (1, 0)$, notando o desenho da circunferência, próximo ao ponto $(1, 0)$, é óbvio que não há um intervalo aberto $(1-r, 1+r)$, com $r > 0$, e uma função $g : (1-r, 1+r) \to \mathbb{R}$, tal que $x^2 + g(x)^2 = 1$ para todo $x \in (1-r, 1+r)$. Neste caso, tal g não existe ainda que descontínua. Vide Figura 2.

A circunferência S^1 é a curva de nível zero de $f = f(x, y)$, donde o gradiente $\vec{\nabla} f = \langle 2x, 2y \rangle$ é ortogonal ao S^1 em cada ponto.

Atenção. A reta tangente à curva de nível zero, no ponto $(1, 0)$, é "vertical" [prenúncio de dificuldades para determinarmos $y = g(x)$]. Ainda, $\nabla f(1, 0)$ é paralelo ao eixo x [indicando que tal reta tangente T é paralela a Oy].

Analogamente, se $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ então não existe intervalo I, aberto e contendo $x_0 = -1$, e $g : I \to \mathbb{R}$, tal que $x^2 + g(x)^2 = 1$, $\forall x \in I$, e $g(-1) = 0$. Ainda, a reta tangente à curva de nível zero, no ponto $(-1, 0)$, é paralela ao eixo Oy e o vetor $\vec{\nabla} f(-1, 0)$ é paralelo a Ox (vide Figura 2).

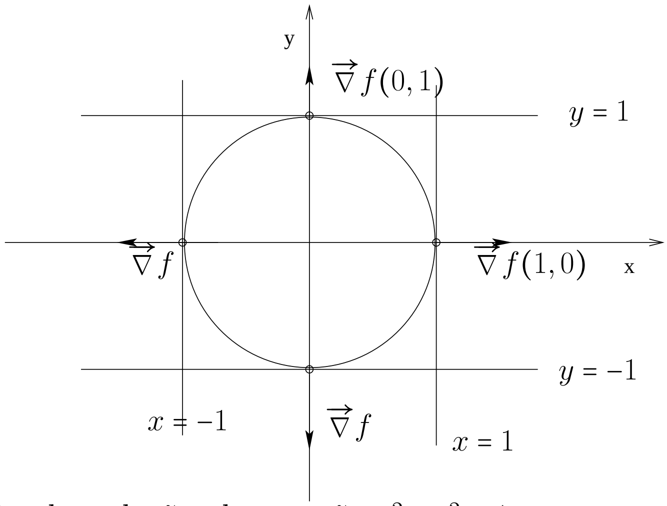

Figura 2: Análise das soluções da equação $x^2 + y^2 = 1$ nos pontos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$

A análise é análoga se procurarmos soluções $x = h(y)$ da equação

$$x^2 + y^2 - 1 = 0\,, \text{ tais que } x_0 = h(y_0) \text{ e } x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

Se $x_0 = 0$, nos pontos $(0, -1)$ e $(0, +1)$ não podemos determinar uma tal função $x = h(y)$, para y num intervalo aberto contendo y_0. Vide Figura 2.

Atenção. As retas tangentes à curva de nível zero, em $(0, -1)$ e em $(0, +1)$, são "horizontais" pois paralelas ao eixo Ox e $\vec{\nabla} f$ é paralelo ao eixo Oy.

Mostremos que se $f \in C^1$ e o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ não é paralelo ao eixo Ox [donde a reta tangente, se existir, à curva de nível de f passando por (x_0, y_0) não é paralela ao eixo Oy], podemos então determinar uma função $y = g(x)$ definida em um intervalo aberto I contendo o ponto x_0 tal que

$$f\big(x, g(x)\big) = 0\,, \forall x \in I\,, \text{ e } g(x_0) = y_0.$$

Teorema 1. Seja $f = f(x, y) \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^2$, e $P_0 = (x_0, y_0)$ em Ω tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Então, se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, existem intervalos abertos I e J , contidos em $\mathbb{R}$, com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, satisfazendo:

- Para cada $x \in I$ existe um único $y = g(x) \in J$, tal que $f(x, g(x)) = 0$.
- A função $g : I \to J$ é diferenciável, de classe C^1, e

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Previamente à prova deste teorema são úteis algumas observações:

(1) Como estamos interessados em resolver $f(x,y) = 0$ localmente, podemos supor que Ω é uma bola aberta centrada em (x_0, y_0) suficientemente pequena tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$; donde $\frac{\partial f}{\partial y}$ não troca de sinal em Ω. Podemos supor, sem perder generalidade, $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ em Ω.

(2) Bolas são conjuntos convexos [um conjunto é convexo se contém todo segmento unindo dois pontos quaisquer do conjunto].

(3) A **unicidade** da função g é trivial. Pois, se $f(x,y_1) = f(x,y_2)$, com (x,y_1) e (x,y_2) em Ω, já que $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ e Ω é convexo, é claro que $y_1 = y_2$.

(4) Tendo provado que g é diferenciável, a fórmula apresentada para a derivada de g segue diretamente da regra da cadeia aplicada ao cômputo:
$$0 = \frac{d(0)}{dx} = \frac{d}{dx}\big\{f(x,g(x))\big\} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x,g(x)\big) \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,g(x)\big)\cdot g'(x) \ .$$

(5) Utilizando a notação apresentada no enunciado do teorema, temos que a curva $\gamma : I \to I \times J \subset \Omega$, $\gamma(x) = (x, g(x))$, é tal que
$$f(\gamma(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$
Logo, γ é uma curva de nível zero de f, satisfazendo três condições:

(i) γ é diferenciável.

(ii) $\gamma'(x) = \big(1, g'(x)\big) \neq \overrightarrow{0}$, $\forall x \in I$.

(iii) $\langle \nabla f(\gamma(x)), \gamma'(x)\rangle = 0$, $\forall x \in I$, donde $\nabla f(\gamma(x)) \perp \gamma'(x)$, $\forall x \in I$.

Dizemos que γ é uma parametrização local, passando por (x_0, y_0), da curva L de nível zero de $f = f(x,y)$. Por meio de uma translação podemos supor a curva γ definida num intervalo $I = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, tal que $\gamma(t) \in L$ e $f(\gamma(t)) = 0$ se $t \in I = (-\delta, \delta)$, e ainda mais, $\gamma(0) = P_0$ e $\gamma'(0) \neq \overrightarrow{0}$. Tal formulação é válida se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

(6) Com as notações e a simplificação do ítem (8), por (8)(iii) segue que o vetor gradiente $\overrightarrow{\nabla} f\big(\gamma(t)\big)$ é ortogonal à curva γ e assim ao gráfico de g. Logo, o vetor $\overrightarrow{\nabla} f\big(\gamma(0)\big)$ é normal ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0).

(7) Tendo provado que a função g é diferenciável e a fórmula para a derivada de g, como as derivadas parciais de f são contínuas, concluímos que a função g' é também contínua. Consequentemente, $g \in C^1$.

Prova do Teorema 1. Dividamos a prova em quatro partes.

- ◇ Existência.

Sendo $f \in C^1$, existe $B = B((x_0, y_0); \delta)$, $\delta > 0$, tal que $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ em B. Sejam y_1 e y_2 tais que $y_1 < y_0 < y_2$, com $(x_0, y_1) \in B$ e $(x_0, y_2) \in B$.

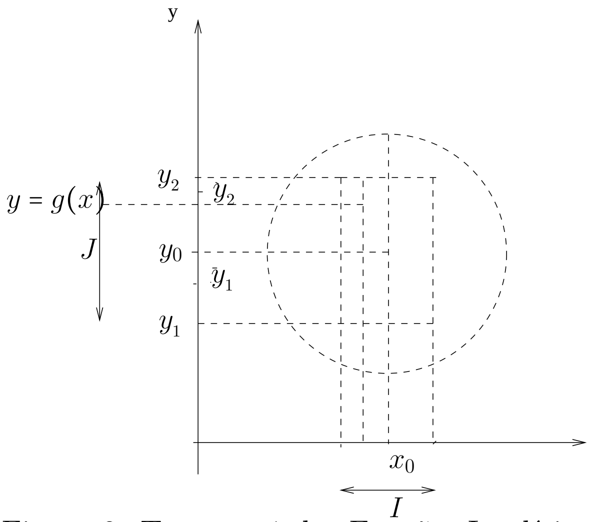

Figura 3: Teorema 1 das Funções Implícitas

A função $[y_1, y_2] \ni y \mapsto f(x_0, y)$ é estritamente crescente e $f(x_0, y_0) = 0$. Logo, $f(x_0, y_1) < 0$ e $f(x_0, y_2) > 0$. Pela continuidade de f, existe um intervalo aberto I, contendo x_0, com $f(x, y_1) < 0$ e $f(x, y_2) > 0$, $\forall x \in I$. Logo, fixado $x \in I$, a função $[y_1, y_2] \ni y \mapsto f(x, y)$ é tal que $f(x, y_1) < 0$ e $f(x, y_2) > 0$. Pelo TVI existe um único $y = g(x)$ em $J = (y_1, y_2)$ tal que $f(x, g(x)) = 0$. Notemos que $I \times J$ está contido em B.

- ◇ Continuidade no ponto x_0.

Sejam $\overline{y_1}$ e $\overline{y_2}$ tais que $y_1 < \overline{y_1} < y_0 < \overline{y_2} < y_2$. Procedendo como acima, temos um intervalo aberto I_1 centrado em x_0 e contido em I, tal que:

$$\text{se } x \in I_1 \text{ então } g(x) \in (\overline{y_1}, \overline{y_2}).$$

Logo, g é contínua no ponto x_0.

◇ Diferenciabilidade em x_0.

Seja $\Delta x \neq 0$ pequeno o suficiente tal que $x_0 + \Delta x \in I$. Consideremos $P_0 = (x_0, y_0) = \big(x_0, g(x_0)\big)$ e $P = \big(x_0 + \Delta x, g(x_0 + \Delta x)\big)$, ambos no convexo $I \times J \subset B$. Aplicando o Teorema do Valor Médio à função f restrita ao segmento $\overline{P_0P}$ encontramos um ponto $(\overline{x}, \overline{y}) \in \overline{P_0P}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= f\big((x_0 + \Delta x, g(x_0 + \Delta x)\big) - f(x_0, g(x_0)) = \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\Delta x \ + \ \tfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})[g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)]. \end{aligned}$$

Como as derivadas parciais f_x e f_y são contínuas, com $f_y \neq 0$ em B, e g é contínua em x_0 e, ainda, $(\overline{x}, \overline{y}) \xrightarrow{\Delta x \to 0} P_0 = (x_0, y_0)$, segue que

$$\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})} \xrightarrow{\Delta x \longrightarrow 0} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

◇ Diferenciabilidade em I.

Sejam $\overline{x}$ em I e $\overline{y} = g(\overline{x})$. Consideremos o problema $f(x, h(x)) = 0$ com a condição $h(\overline{x}) = \overline{y}$. A função $g = g(x)$ é uma solução de tal problema. Logo, pela provado acima, g é diferenciável em $\overline{x}$■

Obs. Localmente, em (x_0, y_0), a curva de nível 0 de f é o gráfico de g. Isto é,

$$\big\{(x, y) \in I \times J : f(x, y) = 0\big\} = Gr(g) = \big\{(x, g(x)) : x \in I\big\}.$$

Prova. Imediata■

Exemplo 2. Para quais pontos (x_0, y_0) existe uma solução implícita $y(x)$ (em um intervalo aberto) da equação $y^3 + 3xy + x^3 = 4$? Compute $y'(x_0)$.

Solução. Seja $f(x, y) = y^3 + 3xy + x^3 - 4$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Se $f(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 3y_0^2 + 3x_0 = 3(y_0^2 + x_0) \neq 0$, pelo Teorema 1 existe $y = g(x)$, definida em um intervalo em torno de x_0, tal que

$$f\big(x, g(x)\big) = g(x)^3 + 3xg(x) + x^3 - 4 = 0 \ \text{ e } \ g(x_0) = y_0.$$

Como f é C^1, pelo Teorema 1, g é derivável e pelas regras usuais de derivação segue que $3g(x_0)^2g'(x_0) + 3g(x_0) + 3x_0g'(x_0) + 3x_0^2 = 0$. Logo,

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = g'(x_0) = -\frac{g(x_0) + x_0^2}{g(x_0)^2 + x_0} = -\frac{x_0^2 + y_0}{x_0 + y_0^2} \ ■$$

Destaquemos que sob as hipóteses do Teorema 1 asseguramos (localmente):

a existência, a unicidade e a diferenciabilidade

da solução $y = g(x)$ do problema $f(x,y) = 0$ com a condição $f(x_0,y_0) = 0$. Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, nada podemos assegurar.

(Contra) Exemplo 3. Seja $f(x,y) = x^3 - y^3$, com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $\nabla \mathsf{f}(0,0) = (0,0)$.

(b) Dê uma solução diferenciável $y = g(x)$ de $f(x,y) = 0$ tal que $g(0) = 0$.

Solução.

(a) Obviamente, $x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow x = y$ e, a curva de nível zero é a bissetriz principal. É evidente que o gradiente é nulo em $(0,0)$.

(b) Existe a solução $g(x) = x$, que é única e difererenciável■

(Contra) Exemplo 4. Seja $f(x,y) = x - y^3 = 0$, com a condição $y(0) = 0$.

(a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $\mathsf{f_y}(0,0) = 0$.

(b) Encontre uma solução implícita contínua, mas não derivável, $y = g(x)$.

Solução.

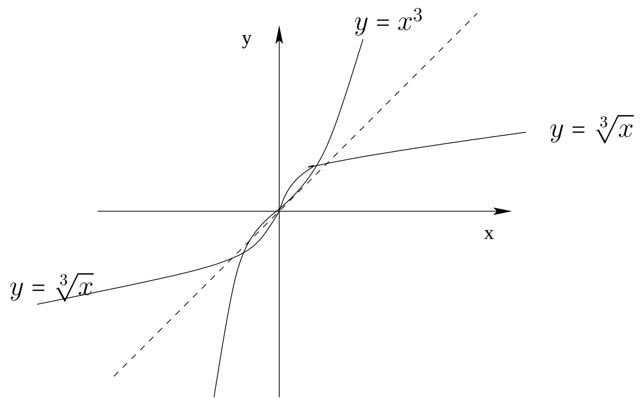

Figura 4: Soluções implicítas da equação $x - y^3 = 0$

(a) A curva de nível 0 é o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$, que é simétrico ao de $y = x^3$ em relação à bissetriz principal. Obviamente, $f_y(x,y) = -3y^2$ e $f_y(0,0) = 0$.

(b) e (c) Se $g(x) = \sqrt[3]{x}$, temos que $f\big(x, g(x)\big) = x - g(x)^3 = 0$, $g(0) = 0$, g é contínua e, é fácil ver, não existe $\frac{dg}{dx}(0)$ ■

(Contra) Exemplo 5. Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$,$(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(b) Dê duas soluções diferenciáveis $y = g(x)$ de $f(x,y) = 0$, com $g(0) = 0$.

Solução.

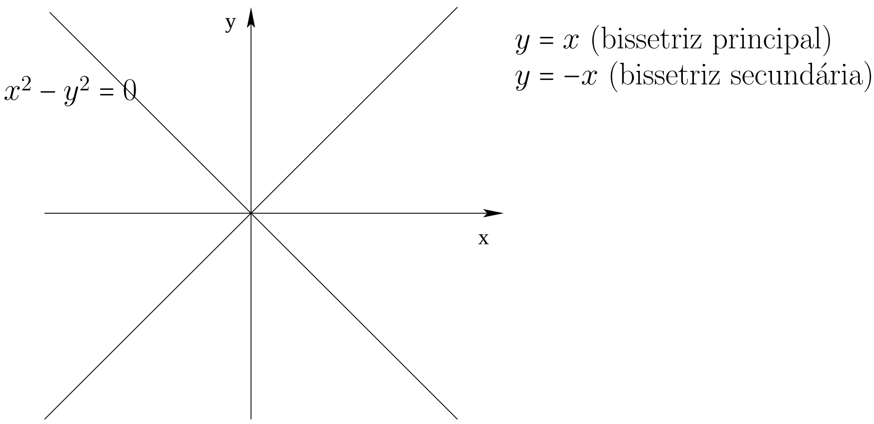

Figura 5: Soluções implicítas da equação $x^2 - y^2 = 0$

(a) É evidente que $f^{-1}(0) = \{(x, \pm x) : x \in \mathbb{R}\}$ e que $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(b) Claramente, $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = -x$ são soluções implicítas diferenciáveis■

Exemplo 6. Suponhamos que a função $z = g(x,y)$, $(x,y) \in \mathrm{Dom}(g)$, com $\mathrm{Dom}(g)$ um aberto de $\mathbb{R}^2$, dada implicitamente pela equação $F(x,y,z) = 0$, é diferenciável em $\mathrm{Dom}(g)$, sendo F diferenciável num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e

$$\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big) \neq 0\,,\ \forall (x,y) \in\ \mathrm{Dom}(g).$$

(a) Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,y,g(x,y)\big)}{\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)} \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,y,g(x,y)\big)}{\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)}\,.$$

(b) Observando que o gráfico de g está contido na superfície de nível 0 de F, mostre que o gradiente de F no ponto $P_o = \big(x_0, y_0, g(x_0,y_0)\big)$ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de g no ponto P_0.

Solução.

(a) Pela regra da cadeia, para pontos $(x,y) \in \mathrm{Dom}(g)$ temos as equações,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[F\big(x,y,g(x,y)\big)\Big] = \frac{\partial F}{\partial x}.1 \ + \ \frac{\partial F}{\partial y}.0 \ + \ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y)) \ + \ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \ , \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[F\big(x,y,g(x,y)\big)\Big] = \frac{\partial F}{\partial y}.0 \ + \ \frac{\partial F}{\partial y}.1 \ + \ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y)) \ + \ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \ , \end{aligned}$$

as quais fornecem, já que $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \neq 0$, as fórmulas em (a).

(b) O plano π, tangente ao gráfico de g no ponto $P_0 = \big(x_0, y_0, g(x_0,y_0)\big)$ tem sua direção dada pelo vetor normal

$$\overrightarrow{n}_{P_0} = \left(g_x(x_0,y_0)\,,g_y(x_0,y_0)\,,-1\right)$$

e, devido à hipótese $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$, o plano π tem também a direção

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\overrightarrow{n}_{P_0} = \Big(\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\,,\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\,,-\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\Big) \ .$$

Pelo item (a) temos o par de equações,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial F}{\partial x}(P_0) \qquad , \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \ ,$$

e consequentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\overrightarrow{n}_{P_0} = \Big(-\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)\,,-\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\,,-\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\Big) \ = -\overrightarrow{\nabla}F(P_0)\blacksquare$$

SEGUNDA VERSÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Teorema 2. Sejam $F(x,y,z)$ uma função de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, com $F(P_0) = 0$. Se $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$, então existe um paralelepípedo aberto $I \times J \times V$ centrado em P_0, tal que para cada $(x,y) \in I \times J$ existe um único número $g(x,y) \in V$ satisfazendo

$$F\big(x, y, g(x,y)\big) = 0.$$

A função $z = g(x,y)$, com $(x,y) \in I \times J$, é diferenciável, de classe C^1, e:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}\ .$$

Antes de iniciarmos a prova deste teorema teçamos duas observações:

(1) Utilizemos as notações F_x, F_y e F_z para as derivadas parciais.

(2) Como no Teorema 1, supondo Ω convexo e pequeno o suficiente tal que $F_z > 0$ em Ω, vale a unicidade: $F(x,y,z_1) = F(x,y,z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.

Prova.

◇ Existência. (Vide figura 6 abaixo.)

Consideremos um paralelepípedo aberto $I \times J \times (z_1, z_2)$, centrado em P_0, pequeno o suficiente tal que seu fecho esteja em Ω. Visto que $F_z > 0$, seguem as desigualdades $F(x_0,y_0,z_1) < 0 = F(x_0,y_0,z_0) < F(x_0,y_0,z_2)$. Como F é contínua, podemos supor que I e J são suficientemente pequenos tais que a restrição de F a $I \times J \times \{z_1\}$ é estritamente negativa e a restrição de F a $I \times J \times \{z_2\}$ é estritamente positiva.

Fixando agora $(x,y) \in I \times J$ e considerando a função $\varphi(z) = F(x,y,z)$, com $z \in [z_1, z_2]$, temos que φ é contínua, estritamente crescente (pois tem derivada estritamente positiva), e ainda $\varphi(z_1) < 0$ e $\varphi(z_2) > 0$. Logo, existe um único $z = g(x,y) \in (z_1, z_2)$ tal que $\varphi(g(x,y)) = F(x,y,g(x,y)) = 0$. Assim, definimos uma função $g : I \times J \mapsto (z_1, z_2)$.

◇ Continuidade de g em (x_0, y_0).

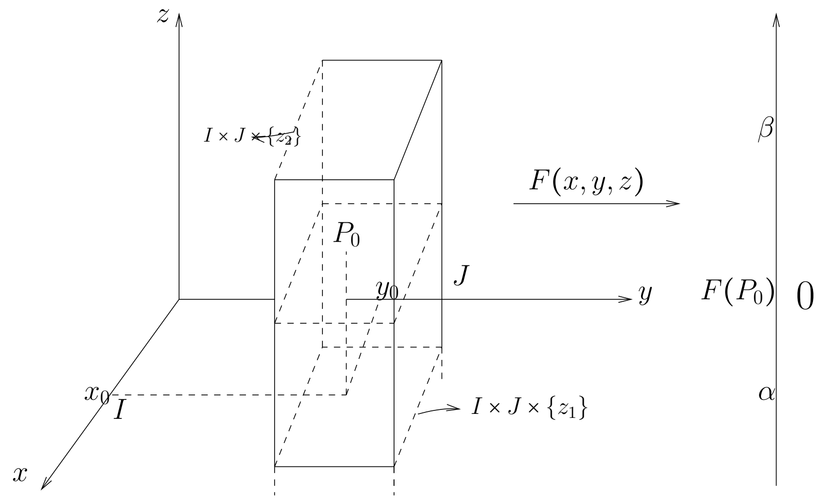

Figura 6: Teorema 2 das Funções Implícitas

Procedendo como acima, para $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$ tais que $z_1 < \overline{z_1} < z_0 < \overline{z_2} < z_2$, obtemos um retângulo aberto $I_1 \times I_2$, centrado em (x_0, y_0), tal que

$$(x,y) \in I_1 \times J_1 \ \Rightarrow g(x,y) \in (\overline{z_1}, \overline{z_2}).$$

Logo, g é contínua em (x_0, y_0).

◇ Continuidade de g em seu domínio.

Analogamente à prova do Teorema Fundamental da Função Implícita, e como g é contínua em (x_0, y_0), é fácil ver que g é contínua em $I_1 \times I_2$.

◇ g é de classe C^1 em seu domínio.

Fixo um arbitrário $\overline{y}$ em I_2 temos $F\big(x, \overline{y}, g(x,\overline{y})\big) = 0$ para todo $x \in I_1$. Definindo a função $\mathcal{F}(x,z) = F(x,\overline{y},z)$, para $(x,z) \in I_1 \times (\overline{z_1}, \overline{z_2})$, temos

$$\begin{cases} \mathcal{F}\big(x, g(x,\overline{y})\big) = F\big(x, \overline{y}, g(x,\overline{y})\big) = 0, & \text{para todo } x \in I_1, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}(x,z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x,\overline{y},z) \neq 0, & \text{para todo } (x,z) \in I_1 \times (\overline{z_1}, \overline{z_2}). \end{cases}$$

Aplicando o Teorema Fundamental das Funções Implícitas à função $\mathcal{F}$ vemos que a função $x \mapsto g(x,\overline{y})$ é derivável em todo ponto $x \in I_1$ e

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,\overline{y}) = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\big(x, g(x,\overline{y})\big)}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\big(x, g(x,\overline{y})\big)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, \overline{y}, g(x,\overline{y})\big)}{\frac{\partial F}{\partial z}\big(x, \overline{y}, g(x,\overline{y})\big)}.$$

Então, como $\overline{y}$ é arbitrário em I_2, segue que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ é contínua em $I_1 \times I_2$. Analogamente, $\frac{\partial g}{\partial y}$ também. Portanto, g é de classe C^1 ■

Exemplo 7. Ache pontos $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tais que a equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$$

tenha soluções implicítas diferenciáveis $z = z(x,y)$ em uma bola aberta contendo (x_0, y_0) e tais que $z(x_0, y_0) = z_0$. Compute $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solução.

Consideremos a superfície de nível zero de

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z.$$

Temos $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 1$ e $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, para $z_0 \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Então, pelo Teorema 2, se o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertence à superfície $F^{-1}(0)$ e ainda $z_0 \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, segue que existe uma função $z = z(x,y)$ como desejada.

Ainda mais, derivando parcialmente a equação

$$x^3 + y^3 + z^3(x,y) - x - y - z(x,y) = 0\,,$$

obtemos

$$3x^2 + 3z^2(x,y)z_x - 1 - z_x = 0 \quad , \quad 3y^2 + 3z^2(x,y)z_y - 1 - z_y = 0\ .$$

Finamente, obtemos $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{1-3x^2}{3z^2(x,y)-1}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{1-3y^2}{3z^2(x,y)-1}$ ■

Exemplo 8. Se $y(x)$ e $z(x)$, com $x \in I = (a,b)$, são soluções implicítas de

$$(S1) \qquad \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0\ , \end{cases}$$

com F e G diferenciáveis num aberto de $\mathbb{R}^3$, compute as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ (em função das derivadas parciais de F e G).

Solução.

Por hipótese temos,

$$(S2) \qquad F\big(x, y(x), z(x)\big) = 0 \ \text{ e } \ G\big(x, y(x), z(x)\big) = 0 \qquad ,$$

e portanto a curva $\gamma(x) = \big(x, y(x), z(x)\big)$, $x \in I = (a,b)$, está contida na intersecção das superfícies de nível zero: $F(x,y,z) = 0$ e $G(x,y,z) = 0$.

Obtemos $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ derivando as equações em (S2) em relação à variável x:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0\,, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}\,, \end{cases}$$

cuja solução é dada pela Regra de Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad ,$$

para todo $x \in (a,b)$ tal que $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$ no ponto $\gamma(x) = \big(x, y(x), z(x)\big)$■

Notação. O determinante jacobiano de F e G em relação a y e a z, nesta ordem, é:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Analogamente para os determinantes jacobianos de F e G em relação a x e z (nesta ordem) e em relação a y e x (nesta ordem). Com tais notações,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

Exemplo 9. Seja $g(u,v) = f(x,y)$, com $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \ . \end{cases}$$

Suponha $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(a) Mostre que $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial u}$.

(b) Compute $\frac{\partial g}{\partial u}$.

(c) Mostre que f é constante sobre as hipérboles $xy = c$.

Solução.

(a) Temos $v = x(u,v).y(y,v)$, $\forall(u,v)$. Portanto, derivando tal equação em relação a u temos,
$$0 = y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u}\,,$$
donde segue (a).

(b) Pela regra da cadeia temos,
$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}\Big(-\frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial u}\Big) \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{x}\Big(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\frac{\partial x}{\partial u}\ . \end{aligned}$$

Então, como $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, segue que $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$.

(c) Seja $c \in \mathbb{R}$ fixado e $\gamma(x) = \big(x, \frac{c}{x}\big)$, $x \neq 0$, uma parametrização da hipérbole $xy = c$. Seja ainda, $\varphi(x) = f\big(x, \frac{c}{x}\big)$ a restrição de f sobre a hipérbole. Então, utilizando que $xy = c$ na segunda igualdade abaixo,
$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x, \frac{c}{x}\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, \frac{c}{x}\Big).\Big(\frac{-c}{x^2}\Big) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{xy}{x^2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{1}{x}\Big[x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\Big](x,y) = 0\ . \end{aligned}$$

Portanto, f é constante sobre as hipérboles $xy = c$■

Exemplo 10. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente pelo sistema

$$(S) \qquad \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \ . \end{cases}$$

(a) Compute $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$ em termos de x e y.

(b) Exiba um par de soluções implícitas, $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, de (S).

Solução.

(a) Derivando as duas equações de (S) em relação à variável u obtemos,

$$\begin{cases} 1 = 2x\frac{\partial x}{\partial u} + 2y\frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} \ . \end{cases}$$

Neste último sistema, multiplicando a primeira equação por x, a segunda por $-2y$ e então somando-as temos x_u. Multiplicando a primeira equação por $-y$, a segunda por $2x$ e somando-as obtemos y_u. Assim,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(x^2 - y^2)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{2(x^2 - y^2)} \ .$$

(b) Do sistema (S) temos,

$$\begin{cases} (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = u + 2v \\ (x - y)^2 = x^2 - 2xu + v^2 = u - 2v, \end{cases}$$

e, pela escolha de sinais (abaixo) ao extrairmos raízes quadradas,

$$x + y = +\sqrt{u + 2v} \qquad , \qquad x - y = -\sqrt{u - v}.$$

Donde,

$$\begin{cases} x = x(u, v) = \frac{\sqrt{u+2v} - \sqrt{u-2v}}{2} \\ y = y(u, v) = \frac{\sqrt{u+2v} + \sqrt{u-2v}}{2} \blacksquare \end{cases}$$

No teorema abaixo utilizamos a notação introduzida no Exemplo 7 para o determinante jacobiano de duas funções em relação a duas de suas variáveis.

TERCEIRA VERSÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Teorema 3. Consideremos $F(x,y,z)$ e $G(x,y,z)$, ambas de classe C^1 no aberto $\Omega \subset R^3$ e seja $P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \Omega$, com

$$F(x_0,y_0,z_0) = 0 \ \text{ e } \ G(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

Nestas condições, se $\overrightarrow{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)$ e $\overrightarrow{\nabla G}(x_0,y_0,z_0)$ são L.I. com

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0) \neq 0,$$

então existem um intervalo aberto I, contendo x_0, e também um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ de classe C^1 em I, tais que

$$F\big(x,y(x),z(x)\big) = G\big(x,y(x),z(x)\big) = 0, \ \forall x \in I.$$

Além disso, temos $y_0 = y(x_0)$ e $z_0 = z(x_0)$. Tem-se ainda:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}};$$

sendo os determinantes jacobianos calculados em $(x,y(x),z(x))$, com $x \in I$.

Prova.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$ é não nulo em Ω. Suponhamos ainda, também sem perda de generalidade, a desigualdade $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Pelo Teorema 2 a equação $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente uma função $z = g(x,y), (x,y) \in V$, sendo g de classe C^1 em uma bola aberta V, com V centrada em (x_0,y_0) e $z_0 = g(x_0,y_0)$. Analisemos, agora, a função $H(x,y) = G(x,y,g(x,y)), \ (x,y) \in V$. É fácil ver que a função H é de classe C^1, com $H(x_0,y_0) = 0$ e $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. De fato, lembrando que o Teorema 2 estabelece $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, obtemos então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0) &= \frac{\partial G}{\partial y}\big(x_0,y_0,g(x_0,y_0)\big) + \frac{\partial G}{\partial z}\big(x_0,y_0,g(x_0,y_0)\big)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\\
&= \frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) - \frac{\partial G}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\\
&= \frac{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x_0,y_0,z_0)\\
&= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x_0,y_0,z_0) \neq 0.
\end{aligned}$$

Como já sabemos, a equação $H(x,y) = 0$, ou $G(x,y,g(x,y)) = 0$, define implicitamente uma função $y = y(x)$, com $x \in I$, de classe C^1 no intervalo I e $y_0 = y(x_0)$. Assim sendo, para completarmos a prova deste teorema definamos a função, obviamente de classe C^1, $z(x) = g(x,y(x))$, onde $x \in I$, e passemos à verificação das propriedades requeridas. É claro que

$$G(x,y(x),z(x)) = 0\,,\ F(x,y(x),z(x)) = 0\,,\ y(x_0) = y_0 \text{ e } z(x_0) = g(x_0,y_0) = z_0.$$

Para determinarmos as fórmulas para as derivadas das funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$, derivemos em relação a x o par de equações

$$\begin{cases} F\big(x,y(x),z(x)\big) = 0 \\ G\big(x,y(x),z(x)\big) = 0. \end{cases}$$

Obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}. \end{cases}$$

Donde, pela regra de Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \blacksquare$$

REFERÊNCIAS

1. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 2, 5 ed., Editora LTC.
2. Lima, Elon, *Curso de Análise*, Vol 2, 11 ed., IMPA.
3. Simmons, G., *Cálculo Com Geometria Analítica*, Vol 2, 1 ed., Makron Books.

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo

oliveira@ime.usp.br