CÁLCULO III - MAT 216 - IFUSP- 1 Semestre de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

A PROPRIEDADE DE DARBOUX

Definição. Um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um **intervalo** se dados a e b distintos e em I, digamos $a < b$, e um número c tal que $a < c < b$, então c pertence a I,

Propriedade de Darboux (Teorema do Valor Intermediário para Derivadas). *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivável. Então, a imagem da função derivada* $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é um intervalo. Isto é, o conjunto*

$$f'\big([a,b]\big) = \{f'(x) : x \in [a,b]\} \textit{ é um intervalo.}$$

Prova. Dividamos a prova em dois passos.

- Se $f'(a)f'(b) < 0$, então f' se anula em algum ponto de (a,b).

  Como f é contínua, f assume um mínimo $m = f(x_1)$ e um máximo $M = f(x_2)$ em $[a,b]$. Provemos, por contradição, que ou $x_1 \in (a,b)$ ou $x_2 \in (a,b)$. De fato, caso contrário abrem-se duas possibilidades:

  $$x_1 = a \text{ e } x_2 = b, \quad \text{ou então } x_1 = b \text{ e } x_2 = a.$$

  Na primeira possibilidade temos: $f'(a) \geq 0$ e $f'(x_2) \geq 0$↯

  Na segunda possibilidade temos: $f'(a) \leq 0$ e $f'(x_2) \leq 0$↯

  Portanto, ou $x_1 \in (a,b)$ ou $x_2 \in (a,b)$. Logo, ou $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$.

- Seja λ pertencente ao intervalo aberto de extremidades $f'(a')$ e $f'(b')$, com a' e b' distintos em $[a,b]$. Renomeando-os, se necessário, podemos supor sem perder generalidade $a' = a$ e $b' = b$. Então, a função derivável

  $$\varphi(x) = f(x) - \lambda x, \text{ para } x \text{ variando em } [a,b],$$

  satisfaz $\varphi'(a)\varphi'(b) < 0$. Logo, pelo passo acima, existe $c \in (a,b)$ tal que

  $$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \lambda \blacksquare$$

Para outra prova (independente de compacidade), recomendo A New Proof of Darboux's Theorem, Lars Olsen, The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 8 (Oct. 2004), pp. 713–715.