CÁLCULO II - MAT 2127

Bacharelado em Química - 2º Semestre de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS E MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Definições: Seja $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. O ponto $P_o \in \mathrm{Dom}(f)$ é:

- **Ponto crítico** ou **estacionário** de f se $\vec{\nabla} f(P_o) = \vec{0}$.
- **Ponto de máximo [mínimo] local** de f se existe uma bola aberta $B_r(P_o)$, de centro P_o e raio $r > 0$, tal que $f(P_o) \geq f(P)$ $[f(P_o) \leq f(P)]$, $\forall P \in B_r(P_o) \cap \mathrm{Dom}(f)$.
- **Um extremante local de** f se é ponto de máximo local, ou mínimo local, de f.
- Um **extremante local de** f **em** $A \subset \mathrm{Dom}(f)$, se $P_o \in A$ é ponto de máximo local, ou mínimo local, de f **restrita a** A.

Nestas notas Ω indica sempre um aberto, de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1 Sejam $f, g \in C^1(\Omega)$ e $L = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$, $\vec{\nabla} g(x, y) \neq \vec{0}$, $\forall (x, y) \in L$. Então, se $P_o = (x_o, y_o) \in L$ é máximo, ou mínimo, local de f em L, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(*) \qquad \vec{\nabla} f(P_o) = \lambda \, \vec{\nabla} g(P_o).$$

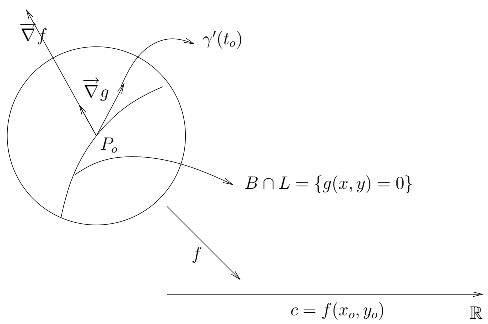

Figura 1: Teorema de Lagrange no Plano

Idéia (vide Figura 2-A): Se $\vec{\nabla} f(P_o) \neq \vec{0}$ é oblíquo a L em P_o, a curva C de nível $f(P_o)$, de f, cruza L e as de nível c, de f, $c \approx f(P_o)$, com gráficos próximos a C, também cruzam L e, orientando-as na direção (gradiente) de crescimento de c vemos que P_o não é máximo, nem mínimo, local de f em L, contra a hipótese. Portanto $\vec{\nabla} f(P_o)$ é ortogonal a L, assim como $\vec{\nabla} g(P_o)$, e consequentemente paralelo a $\vec{\nabla} g(P_o)$.

Prova: Localmente, em P_o, L é uma curva $\gamma(t)$, t numa vinhança de zero, $\gamma(0) = P_o$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$ [v. Teor. 1 das Funções Implícitas]. Assim, $(f \circ \gamma)(t)$ têm extremante em $t = 0$, $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ e, pela regra da cadeia, $\vec{\nabla} f(P_o) \perp \gamma'(0)$. Porém, $g \circ \gamma \equiv 0$, $\vec{\nabla} g(P_o) \perp \gamma'(0)$ e, $\gamma'(0) \neq \vec{0}$ e $\vec{\nabla} g(P_o) \neq \vec{0}$. Donde, $\vec{\nabla} f(P_o)$ é paralelo a $\vec{\nabla} g(P_o)$ e, a tese ■

Interpretações: A idéia dada na prova do Teorema 1 é representada na Figura 2-B. Completando-a, na Figura 2-A representamos as curvas de nível $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 = f(x_0, y_0) = f(P_0)$ no sentido de crescimento do gradiente de f (pois f cresce na direção do gradiente). É claro que o valor máximo de f sobre a curva $L : g(x, y) = 0$, corresponde ao maior valor c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepta a curva L. Em tal ponto P_0 de intersecção tais curvas tem mesma reta tangente e assim mesma reta normal, as quais a priori tem direção $\overrightarrow{\nabla} f(P_0)$ e $\overrightarrow{\nabla} g(P_0)$ (Figura 2-B), respectivamente. Logo, tais vetores são paralelos e $\overrightarrow{\nabla} f(P_0)$ é um "múltiplo" de $\overrightarrow{\nabla} g(P_0)$ já que este é não nulo.

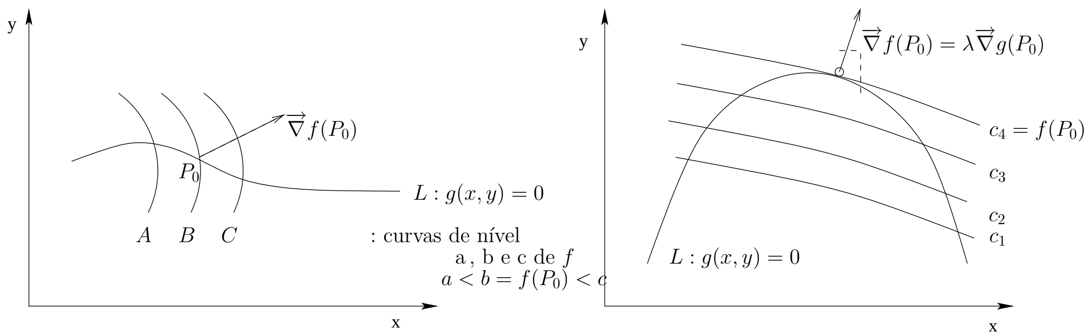

Figura 2: Duas interpretações, complementares, para o Teorema de Lagrange no Plano

Observações: Mantenhamos a notação do teorema acima e sua demonstração.

(1) Se P_o é ponto crítico de f e $\lambda = 0$, têm-se $\vec{\nabla} f(P_o) = \vec{0} = \lambda \vec{\nabla} g(P_o)$ porém, não existe λ tal que $\vec{0} \neq \vec{\nabla} g(P_o) = \lambda \vec{\nabla} f(P_o)$. Neste sentido a equação (*) é a melhor possível.

(2) Pontos críticos de f pertencentes a L, são **candidatos** a extremantes locais de f restrita a L.

(3) Se $\vec{\nabla} f \neq \vec{0}, \forall\ (x, y)$, localmente parametrizamos a curva de nível $c = f(P_o)$, de f, por uma curva δ, com $\delta' \neq \vec{0}$. Esta tem vetor tangente ortogonal a $\vec{\nabla} f(P_o)$. Logo, $\delta'(P_o) \perp \vec{\nabla} g(P_o)$. Assim, em P_o, δ' e γ' sendo não nulos e ortogonais a $\vec{\nabla} g(P_o)$, são múltiplos um do outro. Logo, as curvas $L = \{(x, y) \mid\ g(x, y) = 0\}$ e a de nível $c = f(P_o)$ de f, tangenciam-se em P_o.

(4) Os extremantes surgem do sistema abaixo com uma equação vetorial e outra escalar,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

equivalente ao que segue, com três equações escalares , nas três incógnitas x, y, λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

(5) É possível eliminar o parâmetro λ trivialmente mas a conveniência depende do problema. A resolubilidade de $\vec{\nabla} f(P_o) = \lambda \vec{\nabla} g(P_o)$ equivale a de

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} (P_o) \ = \ 0.$$

A questão da determinação dos extremantes locais de f sobre $\{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ é usualmente referida como o problema da determinação dos máximos e mínimos de f sujeita à **restrição** $g(x, y) = 0$ ou, ainda, dos **máximos e mínimos condicionados de** f sujeita à **condição** $g(x, y) = 0$.

Para aplicarmos os multiplicadores de Lagrange são úteis os conceitos abaixo.

Definições topológicas: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, com $n = 1, 2, 3$.

- A é **fechado** se seu complementar é aberto.
- $A = K \subset \mathbb{R}^n$ é **compacto** se é fechado e limitado.

Segue, sem a demonstração, um resultado fundamental para estudo de máximos e mínimos.

Teorema (Weierstrass) Dada $f \in C(K)$, K compacto em $\mathbb{R}^n$, f assume valor máximo absoluto e mínimo absoluto em K. Isto é, existem P_1 e $P_2 \in K$ tais que

$$f(P_1) \ \leq \ f(X) \ \leq \ f(P_2) \ , \ \ \forall X \in K \ .$$

Exemplo 1: Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva (um ramo de hipérbole) $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$ e também o ponto de tangência.

Resolução:

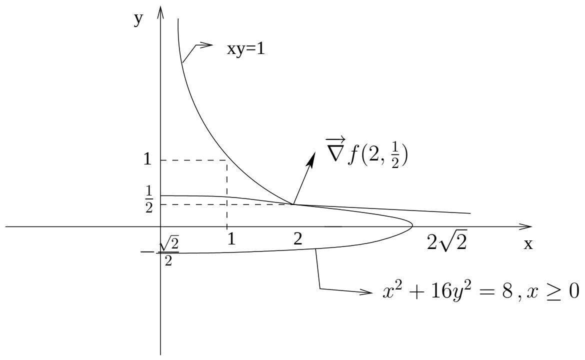

Figura 3: Ilustração para Exemplo 1

No ponto (x_o, y_o) em que as curvas se tangenciam seus vetores tangentes são paralelos e seus vetores normais também. O vetor normal à curva de nível é o gradiente $\vec{\nabla} f$ e o vetor normal à hipérbole $xy = 1$ é o vetor gradiente de $g(x,y) = xy$, $\overrightarrow{\nabla} g(x_o, y_o) = \langle y_o, x_o \rangle$, que é não nulo pois $x_o y_o = 1$. Temos então, $\overrightarrow{\nabla} f(x_o, y_o) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(x_o, y_o)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e,

$$\langle 2x_o, 32y_o \rangle = \lambda \langle y_o, x_o \rangle \ ,$$

logo, $2x_o . 32y_o = \lambda y_o . \lambda x_0$ e, como $x_o y_o = 1$, obtemos $64 = \lambda^2$ e $\lambda = \pm 8$. Porém, como $x_o > 0$ e $y_o > 0$, a possibilidade $\lambda = -8$ é inaceitável. Assim temos, $x_o = 4y_o$ e portanto, $1 = x_o y_o = 4y_o^2$ e assim, $y_o = \frac{1}{2}$ e $x_o = 2$ e o ponto de tangência é

$$(x_o, y_o) = (2, \frac{1}{2}) \ ,$$

a curva de nível é a **elipse** dada pela equação $x^2 + 16y^2 = f(2, \frac{1}{2}) = 4 + 4 = 8$ ■

Exemplo 2: Analise os máximos e mínimos de $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$.

Resolução:

Se E é a elipse $E = \{(x,y) : x^2 = 2y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$ então $E = g^{-1}(0)$ e $\overrightarrow{\nabla} g = \langle 2x, 4y \rangle \neq \vec{0}$ sobre E. Como f é contínua e E é compacto, pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo sobre E. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange nestes extremantes existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(x,y) \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle 2x - 2y, -2x + 6y \rangle = \lambda \langle 2x, 4y \rangle \\ x^2 + 2y^2 = 1 \ . \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro λ na primeira equação do sistema à direita temos,

$$\begin{vmatrix} 2x - 2y & 6y - 2x \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 8y(x-y) - 4x(3y - x) = 0 \ .$$

Logo, dividindo a última equação à direita por 4 e então simplificando,

$$\begin{aligned} 2(xy - y^2) - (3xy - x^2) = 0 \quad &\Leftrightarrow x^2 2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \tfrac{y}{2})^2 - (\tfrac{3y}{2})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2y)(x + y) = 0 \ . \end{aligned}$$

Assim, obtemos as asoluções $P = (2y, y)$ ou $Q = (-y, y)$. Como P e Q pertence à elipse temos

$$\begin{cases} (2y)^2 + 2y^2 = 1 \\ \text{ou} \\ y^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \text{ou} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \ . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \pm \Big(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \Big) \\ \text{ou} \\ Q = \pm \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \Big) \ . \end{cases}$$

Computemos f em P e Q notando que $f(x,y) = (x-y)^2 + 2y^2$. Como $f(-x,-y) = f(x,y)$ temos,

$$\begin{aligned} f(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}) \quad &= f(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = (\tfrac{1}{\sqrt{6}})^2 \ + \ 2(\tfrac{1}{\sqrt{6}})^2 = \tfrac{1}{2} \\ f(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \quad &= f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) = (\tfrac{2}{\sqrt{3}})^2 \ + \ 2(\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 \quad = 2 \ . \end{aligned}$$

Portanto, $\pm \ (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ são pontos de máximo e $\pm(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ são pontos de mínimo ■

Teorema 2 Sejam $f,\, g \in C^1(\Omega)$, $S = \{P = (x,y,z) \in \Omega \;\mid\; g(P) = 0\}$, uma superfície, com $\overrightarrow{\nabla} g(P) \neq \vec{0}, \forall\, P \in S$. Se $P_o = (x_o, y_o, z_o) \in S$ é extremante local de f sobre S, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overrightarrow{\nabla} f(P_o) = \lambda \,\overrightarrow{\nabla} g(P_o)\ .$$

Idéia Análoga a dada no plano. Se $\overrightarrow{\nabla} f(P_o) \neq \vec{0}$ é oblíquo a S em P_o (i.e., ao plano π, tangente a S em P_o), a superfície S' de nível $f(P_o)$, de f, cruza S em P_o e as de nível c, de f, $c \approx f(P_o)$, também cruzam S e orientando-as na direção $\overrightarrow{\nabla} f(P_o)$, de crescimento de c, vemos que P_o não é extremante de f, contra a hipótese. Logo, $\overrightarrow{\nabla} f(P_o)$ é ortogonal a S, assim como $\overrightarrow{\nabla} g(P_o) \neq \vec{0}$ e portanto, $\overrightarrow{\nabla} f(P_o)$ é paralelo a $\overrightarrow{\nabla} g(P_o)$.

Prova:

Pelas hipóteses (vide Funções Implícitas, Teorema 2) S é localmente, em P_o, uma superfície $z = \varphi(t,s)$, (t,s) numa vizinhança de zero, $\varphi(0,0) = P_o$. Logo, $(0,0)$ é extremante de $f \circ \varphi$ e para toda curva γ no gráfico de φ, $Gr(\varphi)$, com $\gamma(0) = P_o$, $(f \circ \gamma)$ tem máximo ou mínimo em $t = 0$ e $\overrightarrow{\nabla} f(P_0) \perp \gamma'(0)$. Então, $\overrightarrow{\nabla} f(P_o)$ é ortogonal a π, o plano tangente a $Gr(\varphi)$ em P_o. Também $\overrightarrow{\nabla} g(P_o)$ é ortogonal a S, isto é, a π. Logo, os vetores gradiente $\overrightarrow{\nabla} f(P_o)$ e $\overrightarrow{\nabla} g(P_o)$ são paralelos e, como $\overrightarrow{\nabla} g$ não se anula, segue a tese $\blacksquare$

Obs 6: No Teorema 2 também é simples eliminar o parâmetro λ e, novamente, a conveniência depende do problema. A resolubilidade de $\vec{\nabla} f(P_o) = \lambda \vec{\nabla} g(P_o)$ equivale a de

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} (P_o) \;=\; \vec{0}\ .$$

Exemplo 3: Verifique que existe, e é único, um ponto P no plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias de P a $(0,0,0)$ e a $(1,1,1)$ seja mínima. Determine-o.

Resolução:

Geometricamente, se K é uma bola fechada que contém os pontos dados e intersecta o plano dado, o ponto procurado pertence a K e é então o mínimo absoluto da função $D(x,y,z) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ restrita ao compacto K. O Teorema de Weierstrass assegura a existência de tal mínimo.

Pelo Teorema 2 os extremantes de $D(x,y,z)$ com a restrição $3x + 2y + z = 12$ satisfazem:

$$\vec{\nabla} D(x,y,z) = \lambda \,\langle 3,2,1\rangle\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

ou, eliminando o parâmetro λ,

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x + 2(x-1) & 2y + 2(y-1) & 2z + 2(z-1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\ .$$

Desta forma é claro que desenvolvendo o segundo determinante pela primeira linha temos, $(2y-1-4z+2)\vec{i}-(2x-1-6z+3)\vec{j}+(4x-2-6y+3)\vec{k}=\vec{0}$ e portanto, $2y=4z-1$ e $x=3z-1$; donde, substituindo na equação do plano, obtemos $3(3z-1)+(4z-1)+z=12$ e $z=\frac{16}{14}$, $y=\frac{25}{14}$ e $x=\frac{34}{14}$. Logo, o ponto procurado é $P_o=\left(\frac{34}{14},\frac{25}{14},\frac{16}{14}\right)$.

Atenção: neste caso também podemos eliminar λ mais simplesmente com as equações

$$\frac{2x+2(x-1)}{3}=\frac{2y+2(y-1)}{2}=\frac{2z+2(z-1)}{1}\quad(=\lambda)\qquad\blacksquare$$

Exemplo 4: Consideremos o plano $\pi: ax+by+cz+d=0$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

(a) Determine o ponto $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ no plano π mais próximo à origem.

(b) Com o método em (a) mostre que a distância de todo ponto $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ ao plano é:

$$\frac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ .$$

1ª Resolução:

(a) Geometricamente sabemos que existe tal ponto $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ e que $P_1=(0,0,0)$ se $d=0$. Determinemos o mínimo da função $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, o quadrado da distância, sujeita à restrição $ax+by+cz+d=0$. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla}\Phi(P_1)=\langle 2x_1,2y_1,2z_1\rangle=\lambda\,\langle a,b,c\rangle\ .$$

Logo, $P_1=(x_1,y_1,z_1)=\frac{\lambda}{2}(a,b,c)$ e, substituindo tais coordenadas para P_o na equação para π obtemos $0=ax_1+by_1+cz_1+d=\frac{\lambda}{2}(a^2+b^2+c^2)+d$ e portanto, $\frac{\lambda}{2}=-\frac{d}{a^2+b^2+c^2}$. Assim, o ponto de π mais próximo à origem é:

$$P_1=-\frac{d}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)\ .$$

(b) Geometricamente é claro que existe em π o ponto $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ mais próximo de $P_o=(x_o,y_o,z_o)$. Este ponto P_2 é mínimo absoluto da função $\Psi(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2$ restrita ao plano $ax+by+cz+d=0$, que avalia o quadrado da distância dos pontos do plano π ao ponto P_o. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla}\Psi(P_2)=\langle 2(x_2-x_o),2(y_2-y_o),2(z_2-z_o)\rangle=\mu\,\langle a,b,c\rangle\ .$$

Logo, $\overrightarrow{P_oP_2}=\frac{\mu}{2}\langle a,b,c\rangle$ e a distância de P_2 a π, dada pelo módulo de $\overrightarrow{P_oP_2}$ é $\frac{|\mu|}{2}|\langle a,b,c\rangle|$. Por outro lado, como $P_2=P_o+\frac{\mu}{2}(a,b,c)$ pertence a π temos,

$$a(x_o+\frac{\mu}{2}a)+b(y_o+\frac{\mu}{2}b)+c(z_o+\frac{\mu}{2}c)+d=0\quad\text{ou,}$$

$$\frac{\mu}{2}(a^2+b^2+c^2)=-(ax_0+by_o+cz_o+d)$$

e, finalmente, a distância procurada é $\frac{|\mu|}{2}|\langle a,b,c\rangle|=\frac{\frac{|\mu|}{2}|(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|ax_0+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

2ª Solução (Geométrica, simples e não utilizando multiplicadores de Lagrange):

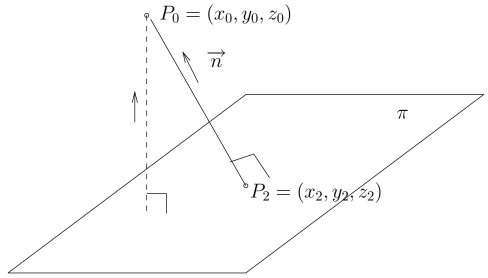

Figura 4: A distância de um ponto a um plano.

Se P_2, pertencente a π, é o pé da perpendicular por P_o ao plano π temos que $\overrightarrow{P_oP_2}$ é paralelo ao vetor normal a π, $\vec{n_\pi} = \langle a, b, c\rangle \neq \vec{0}$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{P_oP_2} = \lambda \langle a, b, c\rangle$ e portanto a distância de P_o a π é $|\overrightarrow{P_oP_2}|$. Porém, de

$$P_2 = P_o + \overrightarrow{P_oP_2} = P_o + \lambda \langle a, b, c\rangle \quad ,$$

segue que

$$0 = a(x_0 + \lambda a) + b(y_o + \lambda b) + c(z_o + \lambda c) + d = 0\,,$$

e assim, $\lambda(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_o + by_o + cz_o + d)$ e $\lambda = -\frac{ax_o + by_o + cz_o + d}{a^2+b^2+c^2}$. Donde,

$$|\overrightarrow{P_oP_2}| = |\lambda|\,|\langle a, b, c\rangle| = \frac{|ax_0 + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \blacksquare$$

Notação O produto vetorial do vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ pelo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, nesta ordem, é $\vec{u} \times \vec{v}$.

Na demonstração do teorema que segue utilizamos o elementar resultado: se $\vec{u}\,, \vec{v}\,, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ são tais que $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} \times \vec{v}$ então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Teorema 3 Consideremos três funções $f, g, h \in C^1(\Omega)$, Ω contido em $\mathbb{R}^3$, e a intersecção de superfícies $L = \{P = (x, y, z) \in \Omega \mid g(P) = 0 \ e \ h(P) = 0\}$, satisfazendo:

$$\vec{\nabla} g(x, y, z) \times \vec{\nabla} h(x, y, z) \neq \vec{0}, \ \forall\ (x, y, z) \in L\ .$$

Então, se $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ é um extremante local de f sobre L, existem λ_1 e λ_2 em $\mathbb{R}$ tais que:

$$\vec{\nabla} f(P_o) = \lambda_1 \vec{\nabla} g(P_o) + \lambda_2 \vec{\nabla} h(P_o).$$

Prova:

Pelas hipóteses (vide o Teorema 3 das Funções Implícitas) L é localmente, em P_o, uma curva $\gamma = \gamma(t)$, $\gamma(0) = P_o$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$. Como $\text{Im}(\gamma)$ está contida na superfície de nível zero de g, temos $\vec{\nabla} g(P_o)$ ortogonal a $\gamma'(0)$ e, analogamente, $\vec{\nabla} h(P_o)$ ortogonal a $\gamma'(0)$, vide Figura 5 a seguir. Logo, $\gamma'(0)$ é paralelo a $\vec{\nabla} g(P_o) \times \vec{\nabla} h(P_o)$.

Ainda, $(f \circ \gamma)(t)$ tem máximo, ou mínimo, local em $t = 0$ e $\vec{\nabla} f(P_o) \perp \gamma'(0) \neq \vec{0}$. Assim, temos $\vec{\nabla} f(P_o) \perp \ \vec{\nabla} g(P_o) \times \vec{\nabla} h(P_o)$ e, $\vec{\nabla} f(P_o)$ é combinação linear de $\vec{\nabla} g(P_o)$ e $\vec{\nabla} h(P_o)$ $\blacksquare$

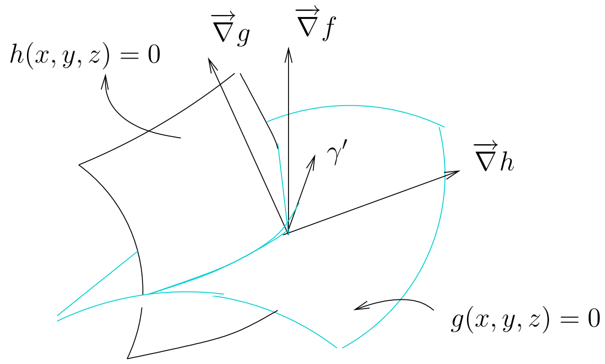

Figura 5: Ilustração ao Teorema 3.

Obs 7: Uma vez mais é elementar eliminar os parâmetros λ_1 e λ_2 e a conveniência é circunstancial. No Teorema 3, temos $\vec{\nabla} f(P_o) = \lambda_1 \vec{\nabla} g(P_o) + \lambda_2 \vec{\nabla} h(P_o)$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} (P_o) \;=\; 0.$$

Obs 8. Os sistemas encontrados nos teoremas acima são redutíveis a uma única equação vetorial, eliminando equações de restrição e acrescentando variáveis. Para o Teorema 3, e analogamente para os demais, definimos a função $\mathcal{L}$ em cinco variáveis livres (vide Exemplo 6, a seguir), ou **não condicionadas**,

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu\, h(x,y,z).$$

As soluções do sistema mencionado são os pontos de máximo ou mínimo **não-condicionados** de $\mathcal{L}$, os quais se encontram entre seus (de $\mathcal{L}$) pontos críticos e satisfazem,

$$\vec{\nabla}\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) \;=\; \langle f_x - \lambda g_x - \mu\, h_x \;,\; f_y - \lambda g_y - \mu\, h_y \;,\; f_z - \lambda g_z - \mu h_z \;,\; -g\,, -h \rangle \;=\; \vec{0},$$

que é um problema sem condições de restrição e simétrico no sentido que as variáveis tem igual importância. Esta formatação do problema é elegante e trivialmente generalizável para uma função f com qualquer número de variáveis e com qualquer número de restrições.

Definição: A variável λ (ou μ) é um **multiplicador de Lagrange**.

Em Economia, Geometria Diferencial, Cálculo das Variações, etc. o multiplicador λ é convenientemente interpretado e ganha importância por si só.

No exemplo 5 é frutífera a eliminação dos multiplicadores (leia a resolução sem tal eliminação no livro texto, Guidorizzi, H. L., 'Um Curso de Cálculo, vol 2 , 5ª ed., pp. 330-331).

Exemplo 5: Determine os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

Resolução:

Determinemos os pontos que maximizam a função $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância de (x, y, z) a $(0, 0, 0)$ com as restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, com $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$. Tais pontos pertencem à intersecção do elipsóide $g = 0$ com o plano $h = 0$, a qual é um compacto K de $\mathbb{R}^3$. Como D é contínua, D assume máximo e mínimo em K. Pela Observação 7 ao Teorema 3, se $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ é extremante local de D sobre $K = \{(x, y, z) : g = 0 \text{ e } h = 0\}$ temos

$$\begin{vmatrix} 2x_o & 2y_o & 2z_o \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x_o & 8y_o & 2z_o \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x_o & y_o & z_o \\ 1 & 1 & 1 \\ x_o & 4y_o & z_o \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, $0 = x_o(z_o - 4y_o) - y_o(z_o - x_o) + z_o(4y_o - x_o) = 3y_o(z_o - x_o)$ e temos $y_o = 0$ ou $z_o = x_o$.

Se $y_o = 0$ obtemos

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + z^2 = 4\,, \end{cases}$$

$$x^2 + (1 - x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Assim, $P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ são candidatos a extremantes.

Se $z_o = x_o$ temos,

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2(1 - 2x)^2 = 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9}\,.$$

Neste caso os candidatos são $P_3 = (0, 1, 0)$ e $P_4 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Comparando os valores $D(P_1) = D(P_2) = 4$, $D(P_3) = 1$ e $D(P_4) = \frac{171}{81}$ constatamos que $P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ são os pontos desejados ■

Exemplo 6: Determine o ponto sobre a reta de intersecção dos planos $x + 2y + z = 1$ e $-3x - y + 2z = 4$ que está mais próximo à origem.

Resolução:

Minimizemos $x^2 + y^2 + z^2$ sujeita às condições $x + 2y + z - 1 = 0$ e $-3x - y + 2z - 4 = 0$. Definindo

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 1) - \mu(-3x - y + 2z - 4)\,,$$

resolvamos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} &= 2x - \lambda + 3\mu = 0\,, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} &= 2y - \lambda + \mu = 0\,, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} &= 2z - \lambda - 2\mu = 0\,, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(x + y + z - 1) = 0\,, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mu} &= (3x + y - 2z + 4) = 0\ . \end{cases}$$

Das três primeiras equações temos,

$$x = \frac{\lambda - 3\mu}{2}\,, \qquad y = \frac{\lambda - \mu}{2}\,, \qquad z = \frac{\lambda + 2\mu}{2}\ ,$$

que substituídas na quarta e na quinta equações e então simplificando fornecem

$$\begin{cases} 3\lambda - 2\mu &= 2 \\ 2\lambda - 4\mu &= -8\ , \end{cases}$$

e $\lambda = 3$ e $\mu = \frac{7}{2}$. Donde concluímos, $x = -\frac{15}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$ e $z = 5$ ■

Estratégia para a determinação de máximos e mínimos, locais e absolutos, sobre compactos.

Definições topológicas: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

- O ponto $P \in A$ é um **ponto interior de** A se existe uma bola aberta, não vazia, centrada em P e contida em A. Isto é, se existe $r > 0$ tal que $B(P; r) \subset A$.
- O ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é um **ponto de fronteira de** A se toda bola aberta, não vazia, centrada em P intersecta A e A^C, o **complementar de** A. Isto é, se para todo $r > 0$, temos $B(P; r) \cap A \neq \emptyset$ e também $B(P; r) \cap A^C \neq \emptyset$.
- O **interior de** A**,** $\mathbf{int}(A)$, é o conjunto dos pontos interiores de A.
- A **fronteira de** A**,** ∂A, é o conjunto dos pontos de fronteira de A.

Dado $P \in A \subset \mathbb{R}^n$ temos uma só das possibilidades: ou $P \in \text{int}(A)$, ou $P \in \partial A$.

Determinação de máximos e mínimos, locais e absolutos, para $f \in C^1(K)$:

Notemos que: (A) pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo, absolutos, em K. (B) Os pontos de máximo e mínimo locais e interiores a K são pontos críticos de f. Isto é, neles o gradiente se anula. Assim, adotamos o procedimento abaixo:

(1) Restringindo f a $\text{int}(K)$ determinamos os pontos críticos, candidatos a extremantes.

(2) Encontramos os possíveis pontos de máximo e mínimo de f sobre a fronteira, ∂K, ou elementarmente ou por multiplicadores de Lagrange.

(3) O máximo e o mínimo absolutos estão entre os valores de f nos pontos acima obtidos.

Exemplo 7 Dada $f(x,y) = 6x^2+18xy+4y^2-6x-10y+5$, determine os extremantes e os máximos e mínimos locais e absolutos de f no quadrado $K = \{(x,y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$.

Resolução: Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\vec{\nabla} f \quad = \langle 12x+18y-6, 18x+8y-10\rangle = \langle 0,0\rangle \quad \Rightarrow \quad 2x+3y-1=0 \quad \text{e} \quad 9x+4y-5=0$$

Logo, o único ponto crítico no interior de K é $P_0 = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right)$. A matriz hessiana de f é,

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e então, $f_{xx}(P_0) = 12 > 0$ e o determinante hessiano $H_f(P_0)$ é negativo. Logo, P_0 é ponto de sela e f não tem máximo nem mínimo locais no interior de D.

Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1,1] \ \cup \ \{1\} \times [-1,1] \ \cup \ [-1,1] \times \{-1\} \ \cup \ [-1,1] \times \{1\} \ .$$

Na figura abaixo as setas indicam a direção do vetor ortogonal a ∂K.

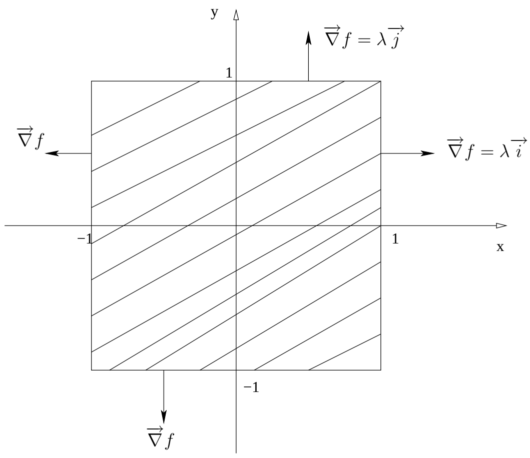

Figura 6: Ilustração ao Exemplo 7

Os extremantes locais na fronteira de K, mas não um vértice, satisfazem (v. Teorema 2):

Em $\{-1\}\times]-1,1[$ temos $x=-1$ e $0 = f_y = -18+8y-10$; logo, $y = 7/2$, que descartamos.

Em $\{1\}\times]-1,1[$ temos $x = 1$ e $0 = f_y = 18+8y-10$; logo, $y=-1$ e $P_1 = (1,-1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Em $]-1,1[\times\{-1\}$ temos $y=-1$ e $0 = f_x = 12x-18-6$; logo, $x = 2$, que descartamos.

Em $]-1,1[\times\{1\}$ temos $y = 1$ e $0 = f_x = 12x+18-6$; logo, $x=-1$ e $P_2 = (-1,1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Consequentemente, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre o vértices. Temos, $f(1,1) = 17$, $f(-1,-1) = 49$, $f(1,-1) = +1$, e $f(-1,+1) = -7$.

Resposta: Não existem máximo ou mínimo locais e interiores; $f(-1,+1) = -7$ é o mínimo absoluto e $f(-1,-1) = 49$ é o máximo absoluto ■