APOIO 3 - TETRAEDRO - CÁLCULO II -

Bacharelado Química - Diurno

2º SEMESTRE de 2008

Professor Oswaldo Rio Branco

1. Projeto proposto em Stewart, J. Cálculo, vol 1, pg. 811.

   Com a notação do livro texto e P, Q, R, S os vértices do tetraedro temos (é geométrico),

$$\vec{v_1} = \vec{QR} \times \vec{QS}\ , \quad \vec{v_2} = -\vec{RS} \times \vec{RP}\ , \quad \vec{v_3} = \vec{SP} \times \vec{SQ}\ , \quad \vec{v_4} = -\vec{PQ} \times \vec{PR}\ .$$

   Logo, pelas propriedades do produto vetorial,

$$\begin{aligned}
\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} + \vec{v_4} &= \vec{QR} \times \vec{QS} \ - \ \vec{RS} \times \vec{RP} \ + \ \vec{SP} \times \vec{SQ} \ - \ \vec{PQ} \times \vec{PR} \ = \\
&= [\,-\vec{QR} \times \vec{SQ} \ + \ \vec{SP} \times \vec{SQ}\,] \ + \ [\,\vec{RS} \times \vec{PR} \ - \ \vec{PQ} \times \vec{PR}\,] = \\
&= [\,-\vec{QR} \ + \ \vec{SP}\,] \times \vec{SQ} \ + \ [\,\vec{RS} - \vec{PQ}\,] \times \vec{PR}\,] = \\
&= \vec{SQ} \times [\,\vec{QR} - \vec{SP}\,] \ + \ ....repete..2^{a}..parcela......... = \\
&= \vec{SQ} \times [\vec{QR} + \vec{PS}\,] \ + \ ....repete..2^{a}..parcela......... = \\
&= \vec{SQ} \times [\,\vec{QS} + \vec{SR} + \vec{PS}\,] \ + \ ....repete..2^{a}..parcela........ = \\
&= \vec{SQ} \times [\,\vec{SR} + \vec{PS}\,] \ + \ ....repete..2^{a}..parcela......... = \\
&= \ \vec{SQ} \times [\,\vec{PS} + \vec{SR}\,] \ + \ [\,\vec{RS} - \vec{PQ}\,] \times \vec{PR} = \\
&= \ \vec{SQ} \times \vec{PR} \ + \ [\,\vec{RS} + \vec{QP}\,] \times \vec{PR} = \\
&= \ [\,\vec{SQ} \ + \ \vec{RS} \ + \ \vec{QP}\,] \times \vec{PR} = \\
&= [\,\vec{RS} + \vec{SQ} + \vec{QP}\,] \times \vec{PR} \ = \\
&= \vec{RP} \times \vec{PR} = \vec{0}\ .
\end{aligned}$$

2. A face oposta ao vértice P é o triângulo $\triangle QRS$, de área $A = \frac{|\vec{QR} \times \vec{QS}|}{2}$. A distância de P à face $\triangle QRS$ é a altura h, a projeção de $\vec{PQ}$ na direção do vetor normal, $\vec{n} = \vec{QR} \times \vec{QS}$, ao plano contendo $\triangle QRS$. Assim, h é dado pelo produto interno: $h = \left|\vec{PQ}.\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$ ou,

$$h = \left|\vec{PQ}.\frac{\vec{QR} \times \vec{QS}}{|\vec{QR} \times \vec{QS}|}\right| = \left|\frac{\vec{QS}.[\vec{QR} \times \vec{QS}]}{|\vec{QR} \times \vec{QS}|}\right| = \left|\frac{[\,\vec{QS}, \vec{QR}, \vec{QS}\,]}{|\vec{QR} \times \vec{QS}|}\right|,$$

   com $[\,\vec{QS}, \vec{QR}, \vec{QS}\,]$ o produto misto dos vetores $\{\vec{QS}, \vec{QR}, \vec{QS}\}$. øvolume do tetraedro é

$$V_T = \frac{1}{3}hA(\triangle QRS) = \frac{1}{6}\left|[\vec{QS}, \vec{QR}, \vec{QS}]\right| \ ;$$

   Dadas coord. P, Q, R e S, V_T é $\frac{1}{6}$ do módulo do determinante 3x3 de linhas: $Q - P$, $R - P$ e $S - P$.

3. Por 1 e sendo o tetraedro tri-retangular: $v_4 = -v_1 - v_2 - v_3 = -(v_1 + v_2 + v_3)$,

$$\begin{cases} \vec{v_1} \ /\!/ \ \vec{PS} \\ \vec{v_2} \ /\!/ \ \vec{QS} \\ \vec{v_3} \ /\!/ \ \vec{RS}\,; \ \ \vec{v_1} \perp \vec{v_2}, \ \vec{v_1} \perp \vec{v_3}, \ \vec{v_2} \perp \vec{v_3}. \end{cases}$$

   Logo: $D^2 = |v_4|^2 = v_4.v_4 = (v_1 + v_2 + v_3).(v_1 + v_2 + v_3) = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 = A^2 + B^2 + C^2$.