Curso: MAT 2127 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2009

Posição Relativa Entre Duas Retas em $\mathbb{R}^3$

1. **Notação:** Indicamos o produto misto $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ por $[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}]$, onde $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\in V^3$.

2. **Proposição** Dados A e B pontos em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores não nulos em V^3, sejam as retas
$$r:\ X = A + t\vec{u}\,,\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s:\ X = B + \lambda\vec{v}\,,\ \lambda\in\mathbb{R}\ .$$

   Temos,

   (a) r e s são paralelas $\Leftrightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$.

   (b) r e s são coplanares $\Leftrightarrow [\vec{AB}\,,\vec{u}\,,\vec{v}] = 0$ e, neste caso,

      (i) r e s são coincidentes $\Leftrightarrow\ \vec{AB}\parallel\vec{u}$ ou, equivalentemente, $\vec{AB}\parallel\vec{v}$.

   (c) r e s são reversas $\Leftrightarrow [\vec{AB}\,,\vec{u}\,,\vec{v}]\neq 0$.

   Demonstração:

   (a) Óbvio.

   (b) Suponhamos $\vec{u}\nparallel\vec{v}$ pois o caso $\vec{u}\parallel\vec{v}$ é trivial. Notemos que se $C\in\mathbb{R}^3$ é arbitrário
$$\pi_C\ : X = C + t\vec{u} + \lambda\vec{v}\,,\quad \text{com } t\,,\lambda\in\mathbb{R}\,,$$
   é a equação vetorial de todos os planos paralelos às retas r e s pois $\vec{u}\parallel\pi_C$ e $\vec{v}\parallel\pi_C$.
   Logo, r e s são coplanares se e só se existe $C_0\in\mathbb{R}^3$ tal que $r\subset\pi_{C_0}$ **e** $s\subset\pi_{C_0}$.
   Porém, como r e s são paralelas ao plano π_{C_0} então
$$r\subset\pi_{C_0}\Leftrightarrow A\in\pi_{C_0} \qquad \text{e} \qquad s\subset\pi_{C_0}\Leftrightarrow B\in\pi_{C_0}\ .$$
   Evidentemente, $A\in\pi_{C_0}\Leftrightarrow\pi_A = \pi_{C_0}$.
   Assim, se r e s são coplanares concluímos que $B\in\pi_A$ (pois $\pi_{C_0} = \pi_A$). Inversamente, é óbvio que se $B\in\pi_A$ então $s\subset\pi_A$ e portanto r e s são coplanares.
   Consequentemente, r e s são coplanares se e só se
$$B\in\pi_A\ : X = A + t\vec{u} + \lambda\vec{v}$$
   o que ocorre se e só se o vetor $\vec{AB}$ é ortogonal a $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v}$, normal ao plano π_A.
   Isto é, r e s são coplanares se e só se $\vec{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = [\vec{AB}\,,\vec{u}\,,\vec{v}] = 0$. A segunda afirmação em(b)é trivial.

   (c) Basta notar que r e s são reversas se e só se r e s não são coplanares e aplicar (b) ■

   Obs: A distância entre r e s, supondo-as não paralelas (e portanto $\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$), é
$$d = \left|\frac{\vec{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\right| = \frac{\left|[\vec{AB}\,,\vec{u}\,,\vec{v}]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\ .$$