Prova Substitutiva de MAT2127 - Cálculo II - Química
2º Semestre - 18/12/2009
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Boa Sorte e Boas Festas!

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
E1	
E2	
E3	
Total	

Nome : __________GABARITO__________

NºUSP : ____________________

1. Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right),\ (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) f é contínua em (0, 0)?

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em $(0,0)$ e também nos pontos $(x,y)\neq(0,0)$.

(c) f é diferenciável em (0, 0)?

(d) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$?.

Resolução (a Lista 4-B era específica sobre diferenciabilidade):

(a) Temos, $(x^2+y^2)\,|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)|\leq|x^2+y^2|$ e, pelo teorema do confonto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$. Logo, f é contínua em $(0,0)$.

(b) Temos,

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin(\frac{1}{x^2})=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}}{y}=\lim\limits_{y\to0}y\sin(\frac{1}{y^2})=0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\,,(x,y)\neq(0,0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\,,(x,y)\neq(0,0)\ .\end{cases}$$

(c) Temos $E(h,k)=f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k=(h^2+k^2)\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)$,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)=0\,,\text{e } f \text{ é diferenciável em } (0,0)\ .$$

(d) Em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, f_x e f_y são contínuas e portanto f é diferenciável ■

2. Seja $f : I\!R^2 \to I\!R$ diferenciável e suponha que f satisfaz a relação de Euler

$$x \, \frac{\partial f}{\partial x} \, (x, y) + y \, \frac{\partial f}{\partial y} \, (x, y) = \lambda \; f(x, y), \;\; \lambda \;\; \text{fixo.}$$

Mostre que f é homogênea de grau λ. Isto é,

$$f(tx, ty) = t^{\lambda} \; f(x, y); \; \forall (x, y) \in I\!R^2, \;\; \forall t > 0.$$

Atenção: Esta é a questão 3 da lista 6-B, lista sobre a Relação de Euler solicitada por alunos, e é a recíproca a afirmação em Q7 na prova P2, resolvida no gabarito da P2, tendo também sido provada em sala de aula após a P2.

Resolução:

Dividindo $f(tx, ty)$ por t^{λ} e derivando em relação a t temos

$$\frac{d}{dt}\{ \, t^{-\lambda} f(tx, ty) \, \} = -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx, ty) \;\; + \;\; t^{-\lambda} \Big[\, \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y \, \Big] \, ,$$

e então, utilizando a expressão na relação de Euler,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y = \frac{1}{t} \Big[\, \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)ty \, \Big] \;\; = \;\; \frac{\lambda f(tx, ty)}{t} \;\; .$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\Big\{ \, t^{-\lambda} f(tx, ty) \, \Big\} = -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx, ty) \;\; + \;\; \lambda t^{-\lambda-1} f(tx, ty) = 0$$

e portanto a função $(0, +\infty) \ni t \mapsto t^{-\lambda} f(tx, ty)$ é constante e avaliando em $t = 1$,

$$t^{-\lambda} f(tx, ty) = 1.f(x, y) \, , \forall t > 0 \, \forall (x, y) \, ;$$

donde, $f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y) \quad \blacksquare$

3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície

$$(*) \qquad x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 5zy = 4,$$

no ponto (1, 1, 1).

Resolução:
A superfície S dada é a superfície de nível 0 da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 5zy - 4,$$

cujo gradiente satisfaz

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \langle 2x - 2y\,, 2y - 2x + 5z\,, -2z + 5y\rangle \ , \ \text{ e } \vec{\nabla} f(1, 1, 1) = \langle 0\,, 5\,, 3\rangle \neq \vec{0}\,.$$

Logo, como $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 5 \neq 0$, o gradiente de f é ortogonal a S [provado em aula e vide também Lista 6 Exercício 1 e, ainda, o Teorema 2 nas notas intuladas 'Implícitas' sobre o Teorema das Funções Implícitas disponibilizadas na página destinada ao curso e, por último, páginas 239 e 252-253 no livro 'Um Curso de Cálculo', H.L. Guidorizzi, Vol 2 , 5ª ed., LTC Editora]; isto é, ao plano π tangente a S em $(1, 1, 1)$. Assim sendo temos,

$$\pi : \quad 0(x - 1) + 5(y - 1) + 3(z - 1) = 0 \quad ,$$

e a reta normal N pedida é dada pela equação,

$$N : \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(0, 5, 3) \quad \blacksquare$$

4. Determine a distância entre as retas

$$r : x = 1 + \lambda,\ y = 1 + 6\lambda,\ z = 2\lambda\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$s : x = 1 + 2\mu,\ y = 5 + 15\mu,\ z = -2 + 6\mu\,, \quad \mu \in \mathbb{R}\ .$$

Sugestões: Utilize ou geometria cartesiana ou geometria vetorial ou multiplicadores de Lagrange ou, ainda, o hessiano para uma função em duas variáveis.

Atenção: Esta questão é similar à questão 6 pedida na prova P1.

Resoluções:

Primeira solução, via geometria cartesiana:

As retas r e s não são paralelas e portanto ou são concorrentes ou são reversas. Um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertence ao plano π que contém a reta r e é paralelo à reta s se e somente se [note que $(1, 1, 0) \in r$]:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} = 6(x-1) - 2(y-1) + 3z = 6x - 2y + 3z - 4\ .$$

A distância procurada é então a distância de qualquer ponto de s ao plano π. Escolhendo $(1, 5, -2) \in s$ obtemos (utilizando a fórmula para a distância):

$$d = \frac{|6.1 - 2.5 + 3.(-2) - 4|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{14}{7} = 2\ .$$

Segunda solução, via geometria vetorial

Se $A = (1, 1, 0) \in r$, $B = (1, 5, -2) \in s$, $\overrightarrow{v_r} = \langle 1, 6, 2\rangle$ e $\overrightarrow{v_s} = \langle 2, 15, 6\rangle$, a dist. é

$$d = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot [\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}]}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} \right|\ .$$

Mas,

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} = \langle 6, -2, 3\rangle \quad , \ |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{49} = 7 \quad \text{e}$$

$$d = \frac{1}{7} \left| \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{|-8-6|}{7} = 2 \ \blacksquare$$

Vide próxima página.

Terceira solução, também via geometria vetorial:

Sejam

$$\begin{cases} P &= (1+\lambda\ ,\ \ 1+6\lambda\ ,\ \ 2\lambda\ )\ , \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ Q &= (1+2\mu\ , 5+15\mu\ , -2+6\mu)\ , \quad \mu \in \mathbb{R}\ , \end{cases}$$

pontos arbitrários de r e s, respectivamente.

Nos particulares pontos P e Q tais que a distância entre r e s se realiza devemos ter $\overrightarrow{PQ}$ ortogonal às retas r e s. Logo, $\overrightarrow{PQ}$ paralelo a

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} = \langle 6, -2, 3\rangle$$

e portanto,

$$\overrightarrow{PQ} \times \langle 6,-2,3\rangle \ = \ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda - 2\mu & -4+6\lambda-15\mu & 2\lambda+2-6\mu \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \langle 0,0,0\rangle\ ,$$

donde obtemos o sistema linear com três equações e duas incógnitas,

$$\begin{cases} 3(-4+6\lambda-15\mu)+2(2\lambda+2-6\mu) &= 0 \\ -3(\lambda-2\mu)+6(2\lambda+2-6\mu) &= 0 \\ -2(\lambda-2\mu)-6(-4+6\lambda-15\mu) &= 0\ , \end{cases}$$

que reescrevemos

$$\begin{cases} 22\lambda & -57\mu & = 8 \\ 9\lambda & -30\mu & = -12 \\ -38\lambda & +94\mu & = -24\ , \end{cases}$$

que têm solução única

$$\lambda = \frac{44}{7} \qquad \text{e} \qquad \mu = \frac{16}{7}\ .$$

Logo,

$$P = (1+\lambda\,,1+6\lambda\,,2\lambda\ ) = \left(\frac{51}{7}\,,\frac{271}{7}\,,\frac{88}{7}\right),$$

$$Q = (1+2\mu\,,5+15\mu\,,-2+6\mu) = \left(\frac{39}{7}\,,\frac{275}{7}\,,\frac{82}{7}\right)\ ,$$

e a distância ente r e s é:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{144}{49}+\frac{16}{49}+\frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{196}{49}} = \frac{14}{7} = 2 \quad \blacksquare$$

Quarta solução, via Multiplicadores de Lagrange:

Indicando por $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ os pontos da reta r e por $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ os pontos de s, as equações simétricas de r e s são,

$$r: \quad x_1 - 1 = \frac{y_1 - 1}{6} = \frac{z_1}{2}\,,$$

$$s: \quad \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{y_2 - 5}{15} = \frac{z_2 + 2}{6}\ .$$

Computemos então o ponto de mínimo da função em seis variáveis

$$D(x_1, y_1, z_1\,;\,x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

sujeita às quatro condições, em que cada par define r e s, respectivamente:

$$\begin{cases} 6x_1 & -y_1 & -5 & = 0 \\ y_1 & -3z_1 & -1 & = 0 \\ & & & \\ 15x_2 & -2y_2 & -5 & = 0 \\ 2y_2 & -5z_2 & -20 & = 0\ . \end{cases}$$

Analizemos então,

$$\mathcal{L}(x_1, y_1, z_1\,;\,x_2, y_2, z_2\,;\,\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 +$$

$$-\alpha(6x_1 - y_1 - 5) - \beta(y_1 - 3z_1 - 1) - \gamma(15x_2 - 2y_2 - 5) - \delta(2y_2 - 5z_2 - 20)\ .$$

Os pontos críticos de $\mathcal{L}$ satisfazem o sist. lin. com dez equações e dez incógnitas

$$(*)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2) - 6\alpha & = 0 & \Rightarrow\ x_1 - x_2 = 3\alpha \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2) - 15\gamma & = 0 & \Rightarrow\ x_1 - x_2 = -\frac{15\gamma}{2} \\ & & \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = 2(y_1 - y_2) + \alpha - \beta & = 0 & \Rightarrow\ y_1 - y_2 = \frac{\beta - \alpha}{2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = -2(y_1 - y_2) + 2\gamma - 2\delta & = 0 & \Rightarrow\ y_1 - y_2 = \gamma - \delta \\ & & \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} = 2(z_1 - z_2) + 3\beta & = 0 & \Rightarrow\ z_1 - z_2 = -\frac{3\beta}{2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} = -2(z_1 - z_2) + 5\delta & = 0 & \Rightarrow\ z_1 - z_2 = \frac{5\delta}{2} \\ & & \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 6x_1 - y_1 - 5 & = 0 & \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = y_1 - 3z_1 - 1 & = 0 & \\ & & \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 15x_2 - 2y_2 - 5 & = 0 & \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = 2y_2 - 5z_2 - 20 & = 0\ . & \end{cases}$$

Temos então,

$$\alpha = -\frac{5\gamma}{2}\ \ ;\ \ \beta = -\frac{5\delta}{3}\ \ ;\ \ \gamma - \delta = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{-\frac{5\delta}{3} + \frac{5\gamma}{2}}{2}\ \ \Rightarrow \delta = -\frac{3\gamma}{2}\ .$$

Logo,

$$\alpha = -\frac{5\gamma}{2}\quad,\quad \beta = \frac{5\gamma}{2} = -\alpha\quad,\quad \delta = -\frac{3\gamma}{2}\,,$$

e a distância d procurada satisfaz

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = 9\alpha^2 + (\gamma - \delta)^2 + \frac{25}{4}\delta^2 =$$

$$= \ 9 \times \frac{25}{4}\gamma^2 \ + \ \frac{25}{4}\gamma^2 \ + \ \frac{25}{4} \times \frac{9}{4}\gamma^2 \ = \ \frac{25}{4}\gamma^2[\,9 + 1 \ + \ \frac{9}{4}\,]$$
$$= \frac{25}{4} \times \gamma^2 \times \frac{49}{4} \ .$$

Logo,

uma equação para a distância pedida é: $\quad d = \dfrac{35}{4}|\gamma| \ .$

Isolando x_1, y_1 e z_1 em um de cada um dos três primeiros pares de equações em (*), respectivamente, e reescrevendo as quatro últimas equações obtemos,

$$(**) \quad \begin{cases} x_1 & = x_2 + 3\alpha \quad = x_2 - \frac{15\gamma}{2} \\ y_1 & = y_2 + \gamma - \delta \ = y_2 + \frac{5\gamma}{2} \\ z_1 & = z_2 - \frac{3\beta}{2} \quad = z_2 - \frac{15\gamma}{4} \\ 6x_1 - y_1 & = 5 \\ y_1 - 3z_1 & = 1 \\ 15x_2 - 2y_2 & = 5 \\ 2y_2 - 5z_2 & = 20 \ . \end{cases}$$

Então, substituindo as três primeiras equações na 4ª e na 5ª equações obtemos

$$\begin{cases} 6(x_2 - \frac{15\gamma}{2}) - (y_2 + \frac{5\gamma}{2}) & = 5 \\ (y_2 + \frac{5\gamma}{2}) \quad - 3(z_2 - \frac{15\gamma}{4}) & = 1 \ , \end{cases}$$

e então juntando a esta duas equações a 6ª e a 7ª equações do sistema (**):

$$\begin{cases} 15x_2 - 2y_2 + 0z_2 + 0.\gamma & = 5 \\ 6x_2 - y_2 + 0.z_2 - \frac{95\gamma}{2} & = 5 \\ 0.x_2 + 2y_2 - 5z_2 + 0.\gamma & = 20 \\ 0.x_2 + y_2 - 3z_2 + \frac{55\gamma}{4} & = 1 \ . \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação por 15, a segunda por 6 e a terceira por 2 obtemos,

$$\begin{cases} x_2 - \frac{2}{15}y_2 & = \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{1}{6}y_2 - \frac{95\gamma}{12} & = \frac{5}{6} \\ +y_2 - \frac{5}{2}z_2 & = 10 \\ +y_2 - 3z_2 + \frac{55\gamma}{4} & = 1 \ . \end{cases}$$

Então, multiplicando a primeira equação acima por -1 e somando à segunda e, ainda, multiplicando a terceira por -1 e somando à quarta equação obtemos

$$\begin{cases} x_2 & -\frac{2}{15}y_2 & & & = \frac{1}{3} \\ & -\frac{1}{30}y_2 & & -\frac{95\gamma}{12} & = \frac{1}{2} \\ & +y_2 & -\frac{5}{2}z_2 & & = 10 \\ & & -\frac{1}{2}z_2 & +\frac{55\gamma}{4} & = -9 \ . \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação acima por 30 e somando-a à 3ª obtemos,

$$\begin{cases} x_2 & -\frac{2}{15}y_2 & & & = \frac{1}{3} \\ & -y_2 & & -\frac{95\times 30\gamma}{12} & = 15 \\ & & -\frac{5}{2}z_2 & -\frac{95\times 30\gamma}{12} & = 25 \\ & & -\frac{1}{2}z_2 & +\frac{55\gamma}{4} & = -9 \ . \end{cases}$$

Agora, multiplicando a terceira linha por $-\frac{2}{5}$ e a quarta linha por -2,

$$\begin{cases} x_2 & -\frac{2}{15}y_2 & & & = \frac{1}{3} \\ & -y_2 & & -\frac{475\gamma}{2} & = 15 \\ & & +z_2 & +95\gamma & = -10 \\ & & +z_2 & -\frac{55\gamma}{2} & = +18 \end{cases}$$

e multiplicando a terceira linha por -1 e somando à quarta linha,

$$\begin{cases} x_2 & -\frac{2}{15}y_2 & & & = \frac{1}{3} \\ & -y_2 & & -\frac{475\gamma}{2} & = 15 \\ & & +z_2 & +95\gamma & = -10 \\ & & & -\frac{245\gamma}{2} & = +28 \ , \end{cases}$$

Logo,

$$\gamma = -\frac{56}{245} = -\frac{8}{35}$$

e **a resposta e a distância procurada é**,

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{4}}|\gamma| = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{4}} \times \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{35}} \ = \ \mathbf{2} \ .$$

Tal resolução nos dá os pontos sobre r e s que realizam a distância, 2, entre elas.

Determinando os parâmetros restantes α, β, e δ obtemos,

$$\alpha = -\frac{5\gamma}{2} = \frac{4}{7} \ , \quad \beta = -\alpha = -\frac{4}{7} \ , \quad \delta = -\frac{3\gamma}{2} = \frac{12}{35},$$

e assim o ponto (x_2, y_2, z_2) sobre a reta s é tal que:

$$z_2 = \frac{82}{7} \ , \quad y_2 = \frac{275}{7} \ , \quad x_2 = \frac{39}{7} \, ,$$

e com as três primeiras equações do sistema (**) identificamos (x_1, y_1, z_1).

Quinta solução, via hessiano:

Sejam

$$\begin{cases} P & = (1+\lambda \ , \ \ 1+6\lambda \, , \ \ 2\lambda \ ) \, , \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ Q & = (1+2\mu \, , 5+15\mu \, , -2+6\mu) \, , \quad \mu \in \mathbb{R} \, , \end{cases}$$

pontos arbitrários de r e s, respectivamente.

O quadrado da distância entre P e Q é dado pela expressão,

$$D(\lambda \, , \mu) = |\overrightarrow{QP}|^2 = (\lambda - 2\mu)^2 + (-4 + 6\lambda - 15\mu)^2 + (2\lambda + 2 - 6\mu)^2 =$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda\mu + 4\mu^2) + (16 + 36\lambda^2 + 225\mu^2 - 48\lambda + 120\mu - 180\lambda\mu) + (4\lambda^2 + 4 + 36\mu^2 + 8\lambda - 24\lambda\mu - 24\mu) =$$

$$= 41\lambda^2 + 265\mu^2 - 208\lambda\mu - 40\lambda + 96\mu + 20 \ \ .$$

O gradiente de D é,

$$\vec{\nabla} D(\lambda, \mu) = \langle 82\lambda - 208\mu - 40 \, , 530\mu - 208\lambda + 96 \rangle \ ,$$

e os pontos críticos da função D são dados pelo sistema

$$\begin{cases} 41\lambda - 104\mu - 20 = 0 \\ -104\lambda + 265\mu + 48 = 0 \, , \end{cases}$$

com solução $\lambda = \frac{44}{7}$ e $\mu = \frac{16}{7}$ (verifique).

A matriz hessiana de D no ponto $P_0 = (\frac{44}{7} \, , \frac{16}{7})$ é,

$$\mathcal{H}(D)(P_0) = \begin{bmatrix} 82 & -208 \\ -208 & 530 \ , \end{bmatrix}$$

sendo que $\frac{\partial^2 D}{\partial \lambda^2}(P_0) = 82 > 0$ e o determinante hessiano,

$$H(D)(P_0) = \det\{\mathcal{H}(D)(P_0)\} = 82 \times 530 - (208)^2 = 196 > 0 \ .$$

Logo, P_0 é ponto de mínimo local de D e, como é o único ponto crítico de D, que mede a distância entre dois pontos arbitrários das retas r e s, segue que estas não são paralelas (como já observamos) e portanto ou são concorrentes ou são reversas. Ainda mais, geometricamente segue que P_0 é de mínimo global.

Substituindo os valores encontrados para λ e μ obtemos,

$$P = (1 + \lambda \, , 1 + 6\lambda \, , 2\lambda \ ) = \left(\frac{51}{7} \, , \frac{271}{7} \, , \frac{88}{7} \right) \ \text{ e}$$

$$Q = (1 + 2\mu \, , 5 + 15\mu \, , -2 + 6\mu) = \left(\frac{39}{7} \, , \frac{275}{7} \, , \frac{82}{7} \right) \ .$$

Então, a distância ente r e s é:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{144}{49} + \frac{16}{49} + \frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{196}{49}} = \frac{14}{7} = 2 \quad \blacksquare$$

5. Verifique que existe e é único, e determine, o ponto P no plano

$$\pi : 3x + 2y + z = 12,$$

cuja soma dos quadrados das distâncias de P a $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.

Atenção: Questão da Lista 7, exercício 8, e também da Lista 6, Exercício 21, que foi resolvido em sala e, por fim, resolvido como Exemplo 3 nas notas "Multiplicadores de Lagrange" disponibilizadas na página destinada ao curso.

Resolução:

Geometricamente, se K é uma bola fechada que contém os pontos dados e intersecta o plano dado, o ponto procurado pertence a K e é então o mínimo absoluto da função $D(x, y, z) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ restrita ao compacto K. O Teorema de Weierstrass assegura a existência de tal mínimo.

Pelo Teorema 2 os extremantes de $D(x, y, z)$ com a restrição $3x + 2y + z = 12$ satisfazem:

$$\vec{\nabla} D(x, y, z) = \lambda \, \langle 3, 2, 1 \rangle \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \, ,$$

ou, eliminando o parâmetro λ,

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x + 2(x-1) & 2y + 2(y-1) & 2z + 2(z-1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad = \ 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x - 1 & 2y - 1 & 2z - 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \ .$$

Desta forma é claro que desenvolvendo o segundo determinante pela primeira linha temos, $(2y - 1 - 4z + 2)\vec{i} - (2x - 1 - 6z + 3)\vec{j} + (4x - 2 - 6y + 3)\vec{k} = \vec{0}$ e portanto, $2y = 4z - 1$ e $x = 3z - 1$; donde, substituindo na equação do plano, obtemos $3(3z - 1) + (4z - 1) + z = 12$

e $z = \frac{16}{14}$, $y = \frac{25}{14}$ e $x = \frac{34}{14}$. Logo, o ponto procurado é $P_o = \left(\frac{34}{14}, \frac{25}{14}, \frac{16}{14}\right)$.

Atenção: neste caso também podemos eliminar λ mais simplesmente com as equações

$$\frac{2x + 2(x-1)}{3} = \frac{2y + 2(y-1)}{2} = \frac{2z + 2(z-1)}{1} \quad (= \lambda) \qquad \blacksquare$$

E1. Determine a solução (real) geral da edo

$$x'' - 2x' + 2x = te^t\cos t.$$

Resolução:

Atenção: Equação similar à edo $x'' - 2x' + 2x = t^2e^t\mathrm{cos}t$ pedida na prova P3.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, cujas raízes são $1 \pm i$. Assim, a solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^t \mathrm{cos}t + c_2 e^t \sin t\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Existe solução particular complexa na forma $z_p(t) = Q(t)e^{(1+i)t}$ da edo

$$z'' - 2z' + 2z = te^{(1+i)t}\ ,$$

com $Q(t)$ um polinômio satisfazendo a edo

$$Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = t\,, \quad \gamma = 1 + i\ .$$

Como $p'(\gamma) = 2\lambda - 2$, $p'(1 + i) = 2i$ e $p(\gamma) = 0$, segue que Q satisfaz,

$$Q'' + 2iQ' = t\ ;$$

logo, Q' é um polinômio de grau 1, donde escrevemos $Q' = \frac{t}{2i} + a$ e obtemos a equação $\frac{1}{2i} + t + 2ai = t$ e $a = \frac{1}{4}$. Assim,

$$Q' = \frac{t}{2i} + \frac{1}{4} = -\frac{it}{2} + \frac{1}{4} \ \Rightarrow\ Q = -\frac{it^2}{4} + \frac{t}{4}\ ,$$

$$z_p(t) = \Big(-\frac{it^2}{4} + \frac{t}{4}\Big)e^t(\,\mathrm{cos}t + i\sin t\,)\ ,$$

$$x_p(t) = \mathrm{Re}(z_p) = \frac{te^t cost}{4} + \frac{t^2e^t\mathrm{cos}t}{4}\ ,$$

e a solução geral real da edo inicial é,

$$x(t) = \ c_1e^t\mathrm{cos}t + c_2e^t\sin t\ + \frac{te^t cost}{4} + \frac{t^2e^t\mathrm{cos}t}{4}\ ,\quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ \blacksquare$$

E2. Determine a solução (real) geral, da edo

$$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = t^2 e^t.$$

Resolução:

O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)\ .$$

Logo, a solução geral da edo homogênea associada à edo dada é,

$$x_h = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t}\,, \quad c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}\ .$$

Sabemos que existe solução particular da forma

$$x_p(t) = Q(t)e^t\,,$$

com $Q = Q(t)$ um polinômio satisfazendo a edo,

$$(*) \qquad \frac{p'''(1)}{3!}Q''' + \frac{p''(1)}{2!}Q'' + \frac{p'(1)}{1!}Q' + \frac{p(1)}{0!}Q = t^2\ .$$

É claro que $p'''(\lambda) = 3!$ e também que, como 1 é raíz dupla, $p(1) = p'(1) = 0$. Ainda mais, $p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 8\lambda + 5$ e $p''(\lambda) = 6\lambda - 8$ e portanto $p''(1) = -2$.

Desta forma a edo (*) torna-se,

$$Q''' - Q'' = t^2\,;$$

e é então fácil perceber que Q'' é um polinômio de grau 2 e ainda,

$$Q'' = -t^2 + at + b \quad \Rightarrow \quad Q''' = -2t + a\ .$$

Logo,

$$t^2 = -Q'' + Q''' = (t^2 - at - b) + (-2t + a) = t^2 + (-a - 2)t + (a - b)$$

e assim concluímos que

$$a = -2 \quad , \quad b = -2\ ,$$

$$Q'' = -t^2 - 2t - 2 \quad , \quad Q' = -\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t \quad , \quad Q = -\frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{3} - t^2\ ,$$

$$x_p(t) \ = \ \Big(-\frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{3} - t^2\Big)e^t\ .$$

Portanto, a solução geral da edo é

$$x_g(t) = \ c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t} \ + \ \Big(-\frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{3} - t^2\Big)e^t\,, \quad c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

E3. Determine se são convergentes ou não as séries abaixo. Se a série for convergente determine sua soma.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^n}{3^{n-1}}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Resolução:

(a) Temos $\frac{e^n}{3^{n-1}} = e\left(\frac{e}{3}\right)^{n-1}$ sendo que $0 < \frac{e}{3} < 1$.

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e\left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} = e\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^{n-1},$$

é convergente.

(b) Como a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é uma série de termos positivos divergente e

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

segue que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é também divergente $\blacksquare$