$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT2127 - Cálculo II - Química

28.11.2008

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Nome : ____________GABARITO____________

N$^{\underline{o}}$USP : ________________________

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Extra	
Total	

1. Dada $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, determine o ponto do plano $x + y + z = 5$ no qual $f(x,y,z)$ é mínimo.

Resolução

A função $\varphi(x,y) = f(x,y,5-x-y) = 2x^2 + 3y^2 + (5-x-y)^2$ é tal que $\varphi(0,0) = 25$ e, $\varphi(x,y) \geq 100$ se $x^2 + y^2 \geq 100$. Ainda, φ é contínua e têm no disco compacto $x^2 + y^2 \leq 100$ um ponto de mínimo. Logo, φ têm mínimo global.

Determinemos o ponto de mínimo de $\varphi(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 2xy - 10x - 10y + 25$.

Temos,

$$\vec{\nabla}\varphi = \langle 6x + 2y - 10\,,\, 2x + 8y - 10\rangle = \vec{0} \Rightarrow (x\,,\,y) = (\frac{15}{11}, \frac{10}{11})\ .$$

Como o ponto de mínimo global é crítico e este é único segue que $P = (\frac{15}{11}, \frac{10}{11})$.

O ponto procurado é : $(\frac{15}{11}, \frac{10}{11}, \frac{30}{11})$ $\blacksquare$

2. Determine um máximo relativo de $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ com as restrições $x+y+z = 1$ e $x+y-z = 0$.

Resolução

Somando as duas últimas equações temos $2(x+y) = 1$. Logo, $x+y = \frac{1}{2}$ e $z = \frac{1}{2}$.
Consideremos $\varphi(x) = f(x, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2}) = x^3 + (\frac{1}{2} - x)^3 + \frac{1}{8}$.
Se x_0 é ponto crítico de φ então, $0 = \varphi'(x_0) = 3x_0^2 - 3(\frac{1}{2} - x_0)^2 = 0$. Isto é,

$$0 = x_0^2 - (\frac{1}{2} - x_0)^2 = (2x_0 - \frac{1}{2})\frac{1}{2} \ ,$$

e portanto, $x_0 = \frac{1}{4}$.

Neste ponto temos, $\varphi''(x_0) = 6x_0 + 6(\frac{1}{2} - x_0) = \frac{6}{4} + 6(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{6}{4} + \frac{6}{4} = 3$ e assim, o único ponto crítico é de mínimo e φ não tem máximo relativo. Consequentemente, f sujeita às restrições dadas também não ■

3. Estude com relação a máximos e mínimos relativos a função

$$f(x,y,z) = \frac{x^5}{5} + y^4 + z^4 - \frac{x^3}{3} - 2y^2.$$

Resolução

Pontos críticos: $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \langle x^4 - x^2\,, 4y^3 - 4y\,, 4z^3 \rangle = \vec{0}$. Logo,

$$x^2(x^2-1) = 0\,, 4y(y^2-1) = 0\,, z = 0\ .$$

Isto é,
$P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,-1,0)$, $P_3 = (0,1,0)$,
$P_4 = (1,0,0)$, $P_5 = (1,-1,0)$, $P_6 = (1,1,0)$,
$P_7 = (-1,0,0)$, $P_8 = (-1,-1,0)$, $P_9 = (-1,1,0)$.

Temos, $f_{xx} = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1)$, $f_{yy} = 12y^2 - 4 = 4(3y^2-1)$, $f_{zz} = 12z^2$ e derivadas mistas nulas. Analisemos as matrizes em P_i $(z=0)$, $1 \leq i \leq 9$,

$$\mathcal{H}(f)(P_i) = \begin{bmatrix} 2x(2x^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & f_{zz} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_1(f)(P_i) = \begin{bmatrix} 2x(2x^2-1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) \end{bmatrix}\ .$$

Não podemos aplicar o teorema pois o hessiano é zero.

Pontos críticos em que a diagonal de $\mathcal{H}f$ troca de sinal são de sela: No ponto P_4 temos $f_{xx} = 2$ e $f_{yy} = -4$; em P_8 e P_9 temos, $f_{xx} = -2$ e $f_{yy} = 8$.

$P_i = (0, y_i, 0)$, $i = 1,2,3$, são de sela: $x = 0$ não é máximo ou minímo local da restrição $\varphi_i(x) = f(x, y_i, 0) = x^3(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) + (y_i^4 - 2y_i^2)$ pois $(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) < 0$ se $x \approx 0$ e x^3 é positivo à direita de zero e negativo à esquerda.

$P_7 = (-1,0,0)$ é ponto de sela pois $\varphi(z) = f(-1,0,z) = z^4 + \frac{2}{15}$ têm mínimo local estrito em$z = 0$ e $\psi(y) = f(-1,y,0) = \frac{2}{15} + y^4 - 2y^2$, $\psi'' = 12y^2 - 4$ têm máximo local estrito em $y = 0$.

$P_5 = (1,-1,0)$ e $P_6 = (1,1,0)$ são pontos de mínimo local pois as funções de uma variável, $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$, $y^4 - 2y^2$ e z^4 têm mínimo local em $x = 1$, $y = \pm 1$ e $z = 0$, respectivamente, e considerando-as funções de três variáveis, x, y, z, elas têm mínimo local em $(1, \pm 1, 0)$ e, a soma das três, que é f, têm mínimo local em $(1, \pm 1, 0)$ $\blacksquare$

4. Resolva a equação

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{3t}.$$

Resolução

O polinômio característico é : $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ e a solução geral da equação homogênea é,

$$x_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$$

Como $p(3) = 2 \neq 0$ então $x_p(t) = \frac{e^{3t}}{2}$ é uma solução particular da equação dada.

Logo, a solução geral da equação dada é,

$$x_g = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t} + \frac{e^{3t}}{2}\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

5. Determine a solução geral de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x = (2+8t)e^t.$$

Resolução

O polinômio característico associado é $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$, com raízes -3 e 1. A solução geral da equação homogênea associada é:

$$x_h = c_1e^{-3t} + c_2e^t \quad c_1\,,\, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Procurando uma solução particular da forma $x_p(t) = Q(t)e^t$ obtemos

$$x_p' = Q'e^t + Qe^t \quad ; \quad x_p'' = Q''e^t + 2Q'e^t + Qe^t\ ,$$

e substituindo na equação dada encontramos a equação abaixo para Q:

$$Q''e^t + 4Q'e^t = (2+8t)e^t\ ,$$

ou seja,

$$Q'' + 4Q' = 8t + 2\ .$$

Substituindo $y = Q'$ chegamos à edo: $y' + 4y = 8t + 2$ que, é claro, tem por solução um polinômio de grau 1. Supondo $y(t) = at + b\,, a, b \in \mathbb{R}$ temos,

$$a + 4at + 4b = 8t + 2\ .$$

Logo, $y(t) = 2t$ e $Q = \int y(t)dt$ e então podemos escolher $Q(t) = t^2$.

A solução geral da equação dada é,

$$x_G = c_1e^{-3t} + c_2e^t + t^2 \quad c_1\,,\, c_2 \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

6. Determine a solução que satisfaz as condições iniciais dadas

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 16x = -15\text{sen } t \ , \ x(0) = 0 \ , \ \dot{x}\ (0) = 1 \ , \ \ddot{x}\ (0) = 0 \ , \ \dddot{x}\ (0) = -1$$

Resolução

O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 16 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) \ .$$

Assim, a solução geral da equação homogênea associada é:

$$x_h = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3cos2t + c_4sen2t \ , \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \ .$$

Como i não é raíz de $p = p(\lambda)$, existe solução particular $x_p(t) = Acost + Bsent$.

Temos que $x_p'(t) = -Asent + Bcost$ e, é claro, $x_p^{(iv)}(t) = Acost + Bsent = x_p(t)$ e então, substituindo na equação dada,

$$x_p^{(iv)} - 16x_p = -15x_p = -15Acost - 15Bsent = -15sent \ .$$

Logo, $A = 0$, $B = 1$ e $x_p(t) = sent$.

A solução geral da equação (sem as condições iniciais) é então,

$$x_G = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3cos2t + c_4sen2t - 15sent \ , \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \ .$$

É evidente, sem efetuarmos longas contas, que a solução do problema dado é:

$$x(t) = sent \qquad \blacksquare$$

7. Determine um plano pelos pontos $(5, 0, 1)$ e $(1, 0, 3)$ e tangente à superfície

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 7.$$

Resolução

Se π é um plano tangente à superfície em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, seu vetor normal, $\vec{n}_{P_0}$, é paralelo ao vetor gradiente de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$ pois a superfície dada é a superfície de nível 7 de f. Logo,

$$\vec{n}_{P_0} \parallel \vec{\nabla} f(P_0) = \langle 2x_0\,, 4y_0\,, 2z_0\rangle \ ,$$

e

$$\pi : \quad 2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0 \ .$$

Desenvolvendo temos, $\quad \pi : \quad 2x_0x + 4y_0y + 2z_0z - 2(x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2) = 0$. Isto é,

$$\pi : \quad 2x_0x + 4y_0y + 2z_0z = 14 \ ,$$

e, substituindo os pontos dados na equação para π, obtemos o par de equações,

$$10x_0 + 2z_0 = 14 \quad ; \quad 2x_0 + 6z_0 = 14 \ .$$

Logo, $x_0 = 1$, $z_0 = 2$, $1 + 2y_0^2 + 4 = 7$ e $y_0^2 = 1$.

Assim, temos dois planos,

$\pi_1 : \ 2(x-1)+4(y-1)+4(z-2) = 0 \ ; \ \pi_2 : \ 2(x-1)-4(y+1)+4(z-2) = 0 \quad \blacksquare$

Questão Extra: Analise $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$, $(x,y) \in I\!R^2$, quanto a máximos ou mínimos locais ou pontos de sela.

a) Detemine os pontos críticos $P_0 = (x_0, y_0)$ de f.

b) Para tais pontos críticos o que a análise da matriz hessiana nos informa?

c) Sobre quais retas pela origem, a restrição de f tem em $(0,0)$ um ponto de máximo ou mínimo ou sela?

d) Analisando a restrição de f a uma bola $B((0,0);r)$, $r > 0$, o que pode ser afirmado sobre o sinal de f restrita a esta bola?

e) Classifique $P_0 = (0,0)$.

f) Tendo em vista a demonstração do teorema, como se explica tal exemplo?

Resolução

(a) Temos, $f(x,y) = 2x^4+y^2-3x^2y$, $\vec{\nabla} f = \langle 8x^3 - 6xy\,, 2y - 3x^2\rangle = \langle 2x(4x^2-3y)\,, 2y-3x^2\rangle$. Logo, $P_0 = (0,0)$ é o único ponto crítico de f.

(b) Temos $f_{xx} = 24x^2 - 6y$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -6x$ e

$$\mathcal{H}(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Logo, $\det \mathcal{H}f(0,0) = 0$ e pelo hessiano não classificamos o ponto crítico.

(c) Se $\varphi(t) = f(t,mt) = 2t^4 + m^2t^2 - 3mt^3$, $m \in \mathbb{R}$, temos $\varphi' = 8t^3 + 2m^2t - 9mt^2$ e $\varphi'' = 24t^2 + 2m^2 - 18mt$. Logo, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 2m^2$ e 0 é ponto de mínimo se $m \neq 0$. Se $m = 0$ então $\varphi(t) = 2t^4$ e 0 é também ponto de mínimo. Sobre o eixo y temos $f(0,y) = y^2$ e, mais uma vez, 0 é ponto de mínimo. Logo, $(0,0)$ é ponto de mínimo de todas as restrições de f sobre retas pela origem.

(d) A parábola (2) $y = 2x^2$ está na 'região interior' delimitada pela parábola (1) $y = x^2$. Seccionamos o plano em três regiões: acima de (2), entre (2) e (1) e, abaixo de (1). Se $y > 2x^2$ $(\geq x^2)$ então $f(x,y) = (y-2x^2)(y-x^2) > 0$. Se $x^2 < y < 2x^2$, $f(x,y) < 0$ e, se $y < x^2$, temos $f(x,y) > 0$. Ainda, $f(0,0) = 0$.

(e) Por (d), $(0,0)$ não é ponto de mínimo nem máximo e é ponto de sela.

(f) Toda reta por $(0,0)$ têm um segmento centrado na origem cuja restrição de f tem em $(0,0)$ um mínimo estrito mas, seus comprimentos não são necessariamente uniformes e, aqui, o ínfimo destes comprimentos só pode ser zero.

Na prova do teorema encontramos $\epsilon > 0$ tal que o ponto em questão é de mínimo (ou máximo) para todo segmento centrado neste ponto e de comprimento ϵ ■