1ª Prova de MAT2127 - Cálculo II - Química

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____________________*GABARITO*____________________

NºUSP : ____

1. Dada $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x-y)}{x^4+y^4} \ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (a) Responda: f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

   (b) Calcule as derivadas parciais de f.

Resolução

(a) Temos, $f(x,-x) = -\frac{2x^3}{2x^4} = -2\frac{1}{x}$ e, não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x,-x)$ e f não é contínua.

(b) Escrevendo $f = \frac{x^2y - xy^2}{x^4+y^4}$ temos, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f_x = \frac{(2xy - y^2)(x^4+y^4) - (x^2y - xy^2)4x^3}{(x^4+y^4)^2} \quad ; \quad f_y = \frac{(x^2 - 2xy)(x^4+y^4) - (x^2y - xy^2)4y^3}{(x^4+y^4)^2} \ ,$$

e, $f(x,0) = f(0,y) = 0$, $\forall x \, , y$ e então, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ $\quad \blacksquare$

2. A lei dos gases para uma massa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $\quad PV = mRT, \quad$ onde R é a constante do gás. Mostre que:
$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

De $P = \frac{mRT}{V}$ segue que : $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{mRT}{V^2}$.
De $V = \frac{mRT}{P}$ segue que: $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{mR}{P}$.
De $T = \frac{PV}{mR}$ segue que: $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{mR}$.

Logo,
$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{mRT}{V^2}\frac{mR}{P}\frac{V}{mR} = -\frac{mRT}{VP} - \frac{mRT}{mRT} = -1 \qquad \blacksquare$$

3. Dada $W = w(x,y,z) = xy + yz + zx$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $s = 0$, $t = 1$.

Resolução

Temos, $w(s,t) = ste^{st} + t^2e^{st} + st^3$. Logo,

$\dfrac{\partial w}{\partial s} = (te^{st} + st^2e^{st}) + t^3e^{st} + t^3 \quad ; \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = (se^{st} + s^2te^{st}) + (2te^{st} + t^2se^{st}) + 3st^2$.

Concluindo, obtemos,

$$\frac{\partial w}{\partial s} = (t + st^2 + t^3)e^{st} + t^3 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = (s + s^2t + 2t + st^2)se^{st} + 3st^2 \quad \blacksquare$$

4. Determine a equação do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x, y) = 3x^3 - y$, em $(1, -1, f(1, -1))$.

Resolução

Temos, $\vec{\nabla} f = \langle 9x^2\,, -1\rangle$, $f_x(1, -1) = 9$, $f_y(1, -1) = -1$ e $f(1, -1) = 4$.

Assim, o plano pedido é dado pela equação,

$$9(x - 1) - 1(y + 1) - (z - 4) = 0 \qquad \blacksquare$$

5. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(6, 0, -2)$ e contém a reta $x = 4 - 2t\ ,\ y = 3 + 5t\ ,\ z = 7 + 4t$.

Resolução

A reta passa por $(4, 3, 7)$ e então o plano têm direção dada pelos vetores, linearmente independentes, $\langle 6 - 4\,, 0 - 3\,, -2 - 7\rangle = \langle 2\,, -3\,, -9\rangle$ e $\langle -2\,, 5\,, 4\rangle$. Logo, uma equação vetorial do plano é

$$(x, y, z) = (4, 3, 7) + \lambda\,\langle 2, -3, -9\rangle + \mu\,\langle -2, 5, 5\rangle\ ,\quad \lambda\,,\ \mu \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

6. Determine se as retas com equação simétrica $x = y = z$ e $x + 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ são ou não reversas e compute a distância entre elas.