$5^{\underline{a}}$ Lista de MAT2127 - Cálculo II - IQ
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2009
Professor Oswaldo Rio Branco

1. a) Dada $z = f(x,y)$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ o plano tangente em (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, tem por equação

$$\pi : \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \ .$$

   b) Definindo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $F(x,y,z) = z - f(x,y)$, o gráfico de f é a superfície de nível 0 de F. Logo, o gradiente de F é ortogonal ao gráfico de f. Compute o gradiente de F.

2. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente.

   a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1,1)$

   b) $f(x,y) = \ln ||(x,y)||$ em $(1,-1)$.

3. Seja $f(x,y) = arc\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\right)$.

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3,3); \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

   b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ onde $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f.

4. Admita que $T(x,y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano x, y. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1,2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

5. a) Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $\begin{cases} z = z(x,y) = e^x \cos y \\ x = x(t,s) = ts \\ y = y(t,s) = \sqrt{t^2 + s^2} \end{cases}$.

   b) Verifique, para o ítem a), a fórmula abaixo ($4^{\underline{a}}$ Regra da Cadeia).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

6. Seja $z = f(x,y)$, onde $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$.

   a) Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

   b) Mostre que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

   c) Utilizando a $4^{\underline{a}}$ Regra da Cadeia, escreva, com na questão 5, a fórmula matricial relacionando as derivadas.

7. Compute a diferencial das funções abaixo.

$$(a)\ z = x^3y^2 \qquad (b)\ z = x arctg(x+2y) \qquad (c)\ z = \sin xy$$

$$(d)\ u = e^{s^2-t^2} \qquad (e)\ T = \log(1+p^2+v^2) \qquad (f)\ x = \arcsin uv$$

8. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$. Compute uma valor aproximado:
   (a) para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.
   (b) para z, correspondente a $x = 1,02$ e $y = 1,002$.

9. Seja $z = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$. Compute:
   (a) a diferencial de z no ponto $(1, 8)$.
   (b) um valor aproximado para z correspondente a $x = 1,01$ e $y = 7,9$.
   (c) um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0,9$ e $y = 8,01$.

10. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

    $f(x, y) = e^{x+5y}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

11. Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1, 1)$.
    (a) Utilizando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(x, y)$, sendo $x = 1,001$ e $y = 0,99$.
    (b) Avalie o erro que se comete com a aproximação do item (a).

12. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.
    (a) $f(x, y) = x \sin y$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
    (b) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

13. Ache P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e Q na reta $x + y = 4$ tais que a distância de P a Q é mínima.

14. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função $f(x, y) = y^2 - x^2$ sobre
    $k = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

15. Ache os pontos de máximo e de mínimo da função $F(x, y, z) = x + 2y + z$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

16. Estude, com relação a máximos e mínimos, e com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$, a função

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2\ .$$

17. Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções:
    a) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
    b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$
    c) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$
    d) $f(x, y, z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$.

18 Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ especificado.
   (a) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$, $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$.
   (b) $f(x, y) = xy$, $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 5\}$.
   (c) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.