$4^{\underline{a}}$ Lista de MAT2127 - Cálculo II - IQ
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2009
Professor Oswaldo Rio Branco

1. Calcule, caso exista:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(6,3)} xy\cos(x-2y)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{8x^2y^2}{x^4+y^4}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2-y^2}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

2. Seja $F(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ e γ a reta: $\gamma(t) = (at, bt)$, com a ou b não nulo.

a) Mostre que $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0$. b) Esboce as curvas de nível de f.

c) Calcule $\lim\limits_{t\to 0} f(\Gamma(t))$, onde $\Gamma(t) = (t^2, t)$. d) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$? Por quê?

3. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \ , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. Determine as derivadas parciais de:

a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

c) $z = x^2 \ln(1+x^2+y^2)$ d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

e) $z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$ f) $z = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

5. Seja $f : I\!R \to I\!R$ contínua, $f(3) = 4$ e $g(x,y,z) = \displaystyle\int_0^{x+y^2+z^4} f(t)d(t)$. Compute,

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1,1)$ b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1)$ c) $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1)$

6. Seja $\varphi : I\!R \to I\!R$ diferenciável tal que $\varphi'(3) = 4$. Seja $g(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2)$.

Calcule: a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1,1)$ b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1)$ c) $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1)$

7. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$ supondo,

a) $z = sen(xy),\ x = 3t,\ e\ y = t^2$ b) $z = \ln(1+x^2+y^2),\ x = \text{sen}t,\ y = \text{cos}t$

8. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2-1)$. Compute,

a) $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f. b) $g'(0)$ supondo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = \dfrac{1}{3}$.

9. Suponha que, para todo x, $f(3x, x^3) = arc\text{tg}(\text{x})$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2$

b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1,f(3,1))$

10. Seja $z = f(u+2v,\ u^2-v)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

11. Prove que $u = f(x+at, y+bt), a, b$ constantes, é solução da equação as derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}$$

12. Seja γ uma curva que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1,3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

    a) Dê a equação da reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$. b) Ache uma curva $\gamma(t)$ como em (a).

13. Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y)$ funções diferenciáveis com $f(x,y,g(x,y)) = 0, \forall(x,y) \in \text{Dom}(g)$. Suponha $g(1,1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,3) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,3) = 5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,3) = 10$.
    Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g, no ponto $(1,1,3)$.

14. Seja $g(t) = f(3t^2,\ t^3,\ e^{2t})$ e suponha $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4$. Compute,
    a) $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f. b) $g'(0)$.

15. Seja $g(x,y) = xf(x^2+y, 2y, 2x-y)$. Expresse $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ em termos de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

16. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

17. Determine o plano tangente e a reta normal à superfície $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1,-1,1)$.

18. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente.
    a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1,1)$

    b) $f(x,y) = \ln ||(x,y)||$ em $(1,-1)$.

    c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

19. Seja $f(x,y) = arc\text{tg}\left(\dfrac{\text{x}}{\text{y}}\right)$.
    a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3,3); \vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

    b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ onde $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f.

20. Admita que $T(x,y) = 16 - 2x^2 - y^2$ é uma distribuição de temperatura no plano x, y. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1,2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.