MAT 2127 - CÁLCULO II - IQUSP

2 SEMESTRE de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

TRÊS TEOREMAS DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Apresentemos antes três formulações equivalentes para a diferenciabilidade.

Lema 1 Consideremos $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aberto em $\mathbb{R}^2$, $X_o = (x_o, y_o) \in \Omega$ e $\vec{v_0} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v_o}$ dependente de X_o. São equivalentes:

$$(1) \quad \begin{cases} f(X) = f(X_o) + \vec{v_o} \cdot (X - X_o) \ + \ E(X - X_o) \\ \lim\limits_{X \to X_o} \frac{E(X - X_o)}{|X - X_o|} = 0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} f(X) = f(X_o) + \vec{v_o} \cdot (X - X_o) \ + \ \Psi(X)|X - X_o| \\ \lim\limits_{X \to X_o} \Psi(X) = 0 = \Psi(X_o) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} f(X) = f(X_o) + \vec{v_o} \cdot (X - X_o) \ + \ \varphi(X) \cdot (X - X_o) \\ \lim\limits_{X \to X_o} \varphi(X) = \vec{0} = \varphi(X_o) \in \mathbb{R}^2 . \end{cases}$$

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2): Basta definir

$$\Psi(X) \ = \ \begin{cases} \frac{E(X - X_o)}{|X - X_o|}, \ \text{se } X \neq X_o, \\ 0, \ \text{se } X = X_o \ . \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Basta definir $E(\vec{h}) = \Psi(X_o + \vec{h})|\vec{h}|$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Definindo,

$$\varphi(X) \ = \ \begin{cases} \frac{\Psi(X)}{|X - X_o|}(X - X_o), \ \text{se } X \neq X_o \\ \vec{0}, \ \text{se } X = X_o, \end{cases}$$

temos que

$$\begin{cases} \lim\limits_{X \to X_o} |\varphi(X)| = \lim\limits_{X \to X_o} |\Psi(X)| = 0, \\ \varphi(X) \cdot (X - X_o) \ = \ \frac{\Psi(X)}{|X - X_o|}(X - X_o) \cdot (X - X_o) \ = \ \Psi(X)|X - X_o|, \text{se } X \neq X_o; \end{cases}$$

logo, se $X = X_o$ é óbvio que (3) está satisfeita.

(3) $\Rightarrow$ (2) Basta definir,

$$\Psi(X) \ = \ \begin{cases} \varphi(X) \cdot \frac{X - X_o}{|X - X_o|}, \ \text{se } X \neq X_o \\ 0, \ \text{se } X = X_o \qquad \blacksquare \end{cases}$$

Dizemos que f é **diferenciável** no ponto (x_o, y_o) se uma das condições do Lema 1 acima estiver satisfeita e que f é diferenciável em Ω se é diferenciável em todos os pontos de Ω.

O vetor $\vec{v_o}$ é, é fácil mostrar, o gradiente de f em X_o: $\vec{v_o} = \vec{\nabla} f(X_o) = \langle f_x(x_o, y_o), f_y(x_o, y_o) \rangle$.

Obviamente, temos um resultado análogo ao Lema 1 se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^3$.

O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Motivação: Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Objetivamos encontrar condições em que dada a equação $f(x,y) = 0$ podemos explicitar y como função da variável x, x em algum intervalo aberto. Isto é, determinarmos uma função $y = g(x)$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in Dom(g) = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $a \neq b$. Ainda mais, assegurada a existência de uma tal função g desejamos identificar sob quais hipóteses podemos concluir, para g, sua unicidade ou continuidade ou diferenciabilidade.

Definição: Uma função $y = g(x)$ se diz **definida (dada) implicitamente** pela equação $f(x,y) = 0$ se $f\big(x, g(x)\big) = 0$, $\forall x \in Dom(g)$. Diz-se também que $y = g(x)$ é **solução implícita** da equação $f(x,y) = 0$. Analogamente definimos soluções implícitas $x = h(y)$.

Exemplo 1: A análise da equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$, neste caso $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, é elucidativa. A equação $x^2 + y^2 = 1$ define a circunferência no plano, de raio 1 e centrada na origem, usualmente indicada por S^1.

Claramente, as funções $g_1(x) = +\sqrt{1-x^2}, x \in (-1,+1)$, e $g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}, x \in (-1,+1)$, são soluções implícitas da equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Os gráficos de g_1 e g_2 são, respectivamente, o "hemisfério" superior $H^+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\}$, e o "hemisfério" inferior $H^- = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\}$, de S^1, subtraídos de ambos os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$.

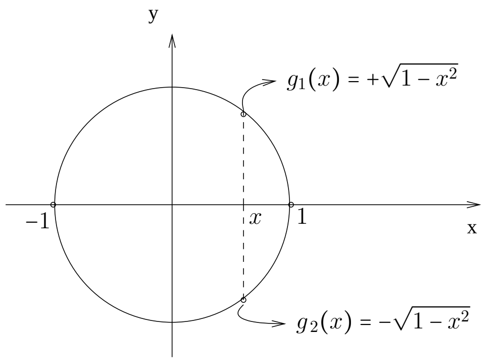

Figura 1: Soluções implicítas da equação $x^2 + y^2 = 1$, se $x \in (-1,+1)$

Se $(x_o, y_o) \in H^+$ e $y_o > 0$, a função $g_1(x) = +\sqrt{1-x^2}, x \in (-1,+1)$, é, entre as soluções da equação $x^2 + y^2 = 1$, uma tal que $g_1(x_o) = y_o$. Analogamente, se $(x_o, y_o) \in H^-$ e $y_o < 0$, $g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}, x \in (-1,1)$, é solução de $f(x,y) = 0$ tal que $g_2(x_0) = y_0$. Vide Figura 1.

Logo, se $(x_o, y_o) \in S^1$ é tal que $y_o < 0$ ou $y_o > 0$ determinamos uma função $y = g(x)$ definida em um intervalo I, aberto e contendo x_o, tal que

$$\begin{cases} f\big(x, g(x)\big) = 0\,, \ \forall x \in I\,, x_o \in I\,, \\ g(x_o) = y_o\ ; \end{cases}$$

neste caso, $I = (-1,1)$, mas todo intervalo $(x_o - r, x_o + r)$, $r > 0$, contido em $(-1,1)$ serve.

Se $(x_o, y_o) = (1,0) \in S^1$, observando o desenho da circunferência, próximo ao ponto $(1,0)$, é óbvio que não podemos encontrar um intervalo aberto centrado em $x_o = 1$, $I = (1-r, 1+r)$, $r > 0$, e uma função $g : (1-r, 1+r) \to \mathbb{R}$, tal que $x^2 + g(x)^2 = 1$ para todo $x \in (1-r, 1+r)$. Neste caso, tal g não existe ainda que descontínua. Vide Figura 2 que segue.

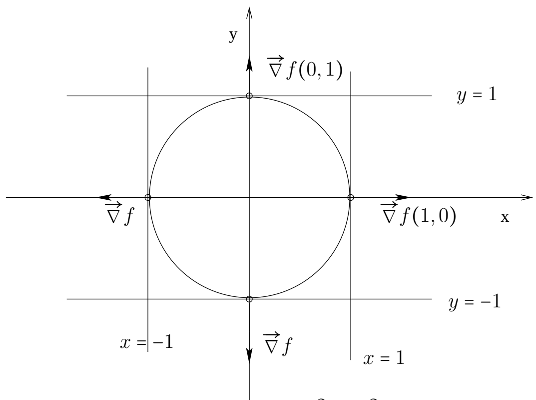

Figura 2: Análise das soluções da equação $x^2 + y^2 = 1$ nos pontos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$

A circunferência S^1 é a curva de nível zero de $f = f(x,y)$, donde o gradiente $\vec{\nabla} f = \langle 2x, 2y \rangle$ é ortogonal ao S^1 em cada ponto.

Atenção: A reta tangente $[T]$ à curva de nível zero, no ponto $(1,0)$, é **"vertical"** pois paralela ao eixo Oy [prenúncio de dificuldades para determinarmos $y = g(x)$] e $\vec{\nabla} f(1,0)$ é paralelo ao eixo x [indicando T paralela a Oy].

Analogamente, se $(x_o, y_o) = (-1, 0)$ não existe intervalo I, aberto e contendo $x_o = -1$, e $g : I \to \mathbb{R}$, tal que $x^2 + g(x)^2 = 1$, $\forall x \in I$, e $g(-1) = 0$. Ainda, a reta tangente à curva de nível zero, em $(-1,0)$, é paralela ao eixo Oy e $\vec{\nabla} f(-1,0)$ é paralelo a Ox (v. Figura 2).

A análise é análoga se procurarmos soluções implicítas da equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$, da forma $x = h(y)$ tais que $x_o = h(y_o)$ e $x_o^2 + y_o^2 = 1$ e, neste caso, se $x_o = 0$, nos pontos $(0,-1)$ e $(0,+1)$ não podemos determinar uma função $x = h(y)$, $y \in I$, I um intervalo aberto centrado em $y_o = -1$ (ou $y_o = +1$) tal que $h(y)^2 + y^2 = 1$ e $h(y_o) = 0$ (vide Figura 2).

Atenção: as retas tangentes à curva de nível zero, em $(0,-1)$ e em $(0,+1)$, são **"horizontais"** pois paralelas ao eixo Ox e o gradiente de f é paralelo ao eixo Oy ■

Mostramos a seguir que se $f \in C^1$ e $\vec{\nabla} f(x_o, y_o)$ não é paralelo ao eixo x [donde a reta tangente, se existir, à curva de nível de f passando pelo ponto (x_o, y_o) não é paralela ao eixo Oy], podemos determinar $y = g(x)$ num intervalo aberto I contendo x_o tal que $f\big(x, g(x)\big) = 0$, $\forall x \in I$, e $g(x_o) = y_o$.

Teorema 1 Seja $f = f(x,y) \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, Ω aberto em $\mathbb{R}^2$, e $P_o = (x_o, y_o) \in \Omega$ tal que $f(x_o,y_o) = 0$. Nestas condições, se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) \neq 0$, então existem intervalos abertos I e J , contidos em $\mathbb{R}$, com $x_o \in I$ e $y_o \in J$, tais que: para cada $x \in I$ existe um único $y = g(x) \in J$, tal que $f(x,g(x)) = 0$. Ainda mais, a função $g : I \to J$ é diferenciável, de classe C^1, e

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))} \ .$$

Previamente à prova deste teorema é útil uma série de **observações:**

(1) O nome do teorema evidentemente se deve ao fato de podermos, teóricamente, determinar localmente a variável y em função da variável x.

(2) Como estamos interessados em resolver $f(x,y) = 0$ localmente, podemos supor que Ω é uma bola aberta (ou retângulo aberto) centrada em (x_o,y_o) suficientemente pequena tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega$; e portanto, $\frac{\partial f}{\partial y}$ não troca de sinal em Ω. Suponhamos então, sem perda de generalidade, $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ em um tal Ω.

(3) Retângulos e bolas são convexos pois contém o segmento que une dois de seus pontos.

(4) A unicidade de $g(x)$ é trivial (não a existência) pois admitindo-se $f(x,y_1) = f(x,y_2)$, com (x,y_1) e $(x,y_2) \in \Omega$, então, sendo $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ e Ω convexo, segue que $y_1 = y_2$.

(5) Pela observação (4), se $g : Dom(g) \to \mathbb{R}$ e $\quad h : Dom(h) \to \mathbb{R}$ são funções tais que

$$f\big(x, g(x)\big) = f\big(x,h(x)\big)\,, \text{ com } x \in Dom(g) \cap Dom(h)\,, \text{ então } g(x) = h(x) \ .$$

Em suma, $g \equiv h$ sobre $Dom(g) \cap Dom(h)$, se g e h forem soluções de $f(x,g(x)) = 0$.

(6) De (5) [com a notação no enunciado do Teorema] temos que tendo provado a afirmação: "$\forall (x_o,y_o) \in \Omega$, existe $g : I \to J$, com $f(x,g(x)) = 0$, $y_o = g(x_o)$ e g derivável em x_o" então, trivialmente, segue a diferenciabilidade de g em todo o intervalo I.

Prova: de fato, dado $x_1 \in I$, arbitrário, pela afirmação sabemos que existe h definida em um intervalo I_1 centrado em x_1 tal que $f(x,h(x)) = 0, \quad \forall x \in I_1$, h derivável (i.e., diferenciável) em x_1. Entretanto, como $x_1 \in I \cap I_1$, o qual é um intervalo contendo x_1 em seu interior, e $g \equiv h$ em $I \cap I_1$; concluímos que g é diferenciável em $x_1, \quad \forall x_1 \in I$.

(7) Tendo provado que g é diferenciável, a fórmula apresentada para a derivada de g segue diretamente da regra da cadeia aplicada ao cômputo:

$$0 = \frac{d(0)}{dx} = \frac{d}{dx}\big\{f(x,g(x))\big\} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x,g(x)\big) \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,g(x)\big)\cdot g'(x) \ .$$

(8) Utilizando a notação apresentada no enunciado do teorema, temos que a curva $\gamma : I \to I \times J \subset \Omega, \quad \gamma(x) = (x,g(x))$, é tal que $f(\gamma(x)) = 0, \quad \forall x \in I$. Logo, γ é uma curva de nível zero de f, satisfazendo ainda as três seguintes condições:

   (i) γ é diferenciável,

(ii) $\gamma\prime(x) = (1, g\prime(x)) \neq \vec{0}, \quad \forall x \in I$ (isto é, o vetor tangente é não nulo),

(iii) $\vec{\nabla} f(\gamma(x)) \cdot \gamma\prime(x) = 0, \quad \forall x \in I$, donde $\vec{\nabla} f(\gamma(x)) \perp \gamma\prime(x), \quad \forall x \in I$.

Dizemos que γ é uma parametrização local, passando pelo ponto (x_o, y_o), da curva de nível zero de $f = f(x,y)$. Por meio de uma translação podemos supor γ definida em $I = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, com $\gamma(t) \in L$ e $f(\gamma(t)) = 0$ se $|t| < \delta$, $\gamma(0) = P_o$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$. Tal formulação serve tanto no caso $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \neq 0$ como no caso $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$.

(9) Com notações e simplificação do ítem (8), por (8)(iii) $\vec{\nabla} f\big(\gamma(t)\big)$ é ortogonal à curva γ e assim ao gráfico de g. Logo, $\vec{\nabla} f\big(\gamma(0)\big)$ **é normal** ao gráfico de g no ponto (x_o, y_o).

(10) Tendo provado g diferenciável e a fórmula para a derivada de g, como as derivadas parciais de f são contínuas, segue que g' é também contínua e portanto, $g \in C^1$.

Demonstração do Teorema:

Existência:

Sendo $f \in C^1$, temos que $\exists \quad B = B((x_o, y_o); \delta), \quad \delta > 0$, tal que $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ em B. Sejam y_1 e y_2 tais que $y_1 < y_o < y_2$, com $(x_o, y_1), (x_o, y_2) \in B$. Seja $J = [y_1, y_2]$ contido no eixo das ordenadas, vide Figura 3 abaixo.

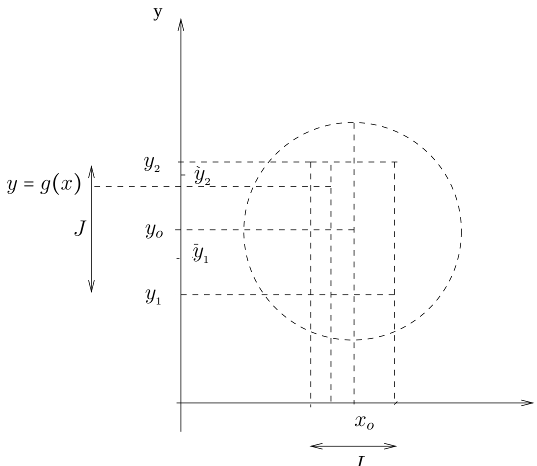

Figura 3: Teorema 1 das Funções Implícitas

Considerando a função $[y_1, y_2] \ni y \mapsto f(x_o, y)$ temos que esta é estritamente crescente e $f(x_o, y_o) = 0$; logo, $f(x_o, y_1) < 0$ e $f(x_o, y_2) > 0$. Consequentemente, pela continuidade de f, existe um intervalo aberto I, contendo x_o, tal que $\forall x \in I, f(x, y_1) < 0$ e $f(x, y_2) > 0$. Portanto, fixado $x \in I$, a função $[y_1, y_2] \ni y \mapsto f(x, y)$ é tal que $f(x, y_1) < 0$ e $f(x, y_2) > 0$; donde, pelo Teorema do Valor Intermediário e pelas observações anteriores, existe um único y, $y = g(x) \in (y_1, y_2)$ tal que $f(x, g(x)) = 0$.

Continuidade em x_o:

Sejam y_1 e y_2 como acima e sejam $\bar{y_1}$ e $\bar{y_2}$ tais que $y_1 < \bar{y_1} < y_o < \bar{y_2} < y_2$. Procedendo como acima encontramos um intervalo aberto I_1 centrado em x_o e contido em I, tal que: $x \in I_1 \Rightarrow g(x) \in (\bar{y_1}, \bar{y_2})$. Portanto, g é contínua em x_o.

Diferenciabilidade em x_o :

Pelo Lema 1 (3), existe um par de funções $(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi$, de Ω a valores reais, tais que:

$$(T1.1) \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= f(x_o,y_o) + f_x(x_o,y_o)(x-x_o) + f_y(x_o,y_o)(y-y_o) \\ &+ \varphi_1(x,y)(x-x_o) + \varphi_2(x,y)(y-y_o) \end{aligned}$$

satisfazendo,

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \varphi_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \varphi_2(x,y) = 0 \ .$$

Substituindo $y = g(x)$ e $y_o = g(x_o)$ em (T1.1) e já que $f(x,g(x)) = 0, \forall x \in I$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x_o,g(x_o))(x-x_o) + f_y(x_o,g(x_o))(g(x)-g(x_o)) \\ &+ \varphi_1(x,g(x))(x-x_o) + \varphi_2(x,g(x))(g(x)-g(x_o)) \end{aligned}$$

assim, dividindo por $x - x_o$, para $x \neq x_o$, obtemos

$$(T1.2) \qquad 0 = f_x(x_o,g(x_o)) + f_y(x_o,g(x_o)).\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} + \varphi_1(x,g(x)) + \varphi_2(x,g(x)).\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}.$$

Agora, como g é contínua em x_o e, φ_1 e φ_2 são contínuas em $(x_o,y_o) = (x_o,g(x_o))$, temos:

$$(T1.3) \qquad \lim_{x\to x_o} \varphi_i(x,g(x)) = 0, \ i = 1, \ 2 \ .$$

Para utilizarmos em (T1.2) os limites dados em (T1.3), reescrevamos (T1.2):

$$(T1.2') \qquad \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}.\left[f_y(x_o,g(x_o)) + \varphi_2(x,g(x))\right] = -f_x(x_o,g(x_o)) - \varphi_1(x,g(x)).$$

Então, pelos limites citados em (T1.3) temos,

$$(T1.4) \qquad \begin{cases} \lim_{x\to x_o} \left[f_y(x_o,g(x_o)) + \varphi_2(x,g(x))\right] & = f_y(x_o,g(x_o)) \neq 0 \\ \\ \lim_{x\to x_o} \left[f_x(x_o,g(x_o) + \varphi_1(x,g(x))\right] & = f_x(x_o,y_o)\,, \end{cases}$$

consequentemente, pelos dois limites em (T1.4), e tomando o limite na expressão (T1.2'), quando x tende a x_o, concluímos que g é diferenciável ∎

Exemplo 2: Determine pontos $(x_o,y_o) \in \mathbb{R}^2$ tais que em um intervalo em torno de x_o existe solução implicíta $y = y(x)$ da equação $y^3 + 3xy + x^3 = 4$. Compute então $y'(x_o)$.

Resolução: Seja $f(x,y) = y^3 + 3xy + x^3 - 4, (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se $f(x_o,y_o) = 0$ e $f_y(x_o,y_o) = 3y_o^2 + 3x_o = 3(y_o^2 + x_o) \neq 0$, pelo Teorema 1 existe $y = g(x)$, definida em um intervalo em torno de x_o tal que $f\big(x,g(x)\big) = g(x)^3 + 3xg(x) + x^3 - 4 = 0$ e $g(x_o) = y_o$.

Como f é C^1, pelo Teorema 1, g é derivável e pelas regras usuais de derivação segue que, $3g(x_o)^2 g'(x_o) + 3g(x_0) + 3x_o g'(x_o) + 3x_o^2 = 0$; logo, $\frac{dy}{dx}(x_o) = g'(x_o) = -\frac{g(x_o)+x_o^2}{g(x_o)^2+x_o} = -\frac{x_o^2+y_o}{x_o+y_o^2}$ ∎

O exemplo abaixo mostra que se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) = 0$ não podemos a priori supor impossível determinar uma solução $y = g(x)$ diferenciável para $f(x,y) = 0$, passando por (x_o,y_o).

Exemplo 3: Seja $f(x,y) = x^3 - y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $\vec{\nabla} f(0,0) = \langle 0,0 \rangle$.

(b) Dê uma solução implícita e diferenciável $y = g(x)$ de $f(x,y) = 0$ tal que $g(0) = 0$.

Resolução:

(a) Obviamente, $x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow x = y$ e, a curva de nível zero é a bissetriz principal. É evidente que o gradiente é nulo em $(0,0)$.

(b) A função $g(x) = x$ é difererenciável e atende os requisitos ■

Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = 0$ e $y = g(x)$ é uma solução contínua para $f(x,y) = 0$, por (x_o, y_o), não necessariamente g é diferenciável.

Exemplo 4: Seja $f(x,y) = x - y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $f_y(0,0) = 0$.

(b) Dê uma solução implicíta e contínua $y = g(x)$, de $f(x,y) = 0$, tal que $g(0) = 0$.

(c) Verifique que g não é derivável.

Resolução:

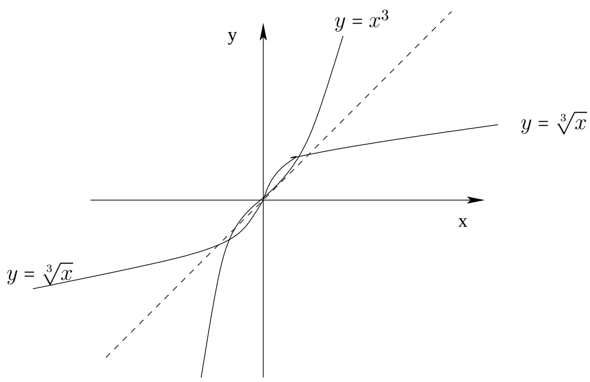

Figura 4: Soluções implicítas da equação $x - y^3 = 0$

(a) Temos $f(x,y) = 0$ se e somente se $x - y^3 = 0$, isto é, $y = \sqrt[3]{x}$. A curva de nível zero é o gráfico da função raíz cúbica, a qual é a inversa da função cúbica: $y = x^3$, cujo gráfico é elementar. O gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ é então simétrico ao gráfico de $y = x^3$ em relação à bissetriz principal do plano [esboce-o]. Obviamente, $f_y(x,y) = -3y^2$ e $f_y(0,0) = 0$.

(b) e (c) Se $g(x) = \sqrt[3]{x}$, temos que $f\big(x, g(x)\big) = x - g(x)^3 = 0$, $g(0) = 0$, g é contínua e, é fácil ver, não existe $\frac{dg}{dx}(0)$ ■

Mostremos agora que se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = 0$ não mais vale a unicidade da solução implicíta diferenciável $y = g(x)$ para $f(x,y) = 0$, passando por (x_o, y_o).

Exemplo 5: Seja $f(x,y) = x^2 - y^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $\vec{\nabla} f(0,0) = \langle 0,0 \rangle$.

(b) Dê duas soluções implicítas diferenciáveis $y = g(x)$ de $f(x,y) = 0$, pelo ponto $(0,0)$.

Resolução:

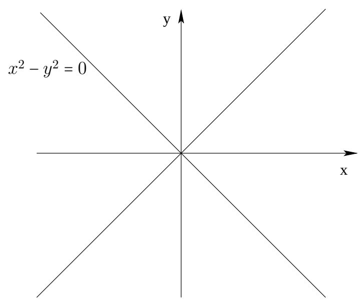

Figura 5: Soluções implicítas da equação $x^2 - y^2 = 0$

(a) A curva de nível zero é o conjunto $\{(x, \pm x) : x \in \mathbb{R}\}$, união das bissetrizes principal e secundária do plano. É evidente que $\vec{\nabla} f(0,0) = \vec{0} \in \mathbb{R}^2$.

(b) É claro que $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = -x$ são soluções implicítas diferenciáveis por $(0,0)$ ∎

Exemplo 6 Suponhamos que a função $z = g(x,y)$, $(x,y) \in Dom(g)$, dada implicitamente pela equação $F(x,y,z) = 0$, é diferenciável em $Dom(g)$, um aberto de $\mathbb{R}^2$, sendo F diferenciável num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big) \neq 0$, $\forall (x,y) \in Dom(g)$.

(a) Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,y,g(x,y)\big)}{\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)} \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,y,g(x,y)\big)}{\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)} .$$

(b) Observando que o gráfico de g está contido na superfície de nível 0 de F, mostre que o gradiente de F no ponto $P_o = \big(x_o, y_o, g(x_o,y_o)\big)$ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de g no ponto P_o.

Resolução:

(a) Pela regra da cadeia, para pontos $(x,y) \in Dom(g)$ temos as equações,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[F\big(x,y,g(x,y)\big)\Big] = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) , \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[F\big(x,y,g(x,y)\big)\Big] = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) , \end{aligned}$$

as quais nos fornecem, já que $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \neq 0$, as duas fórmulas em (a).

(b) O plano π, tangente ao gráfico de g no ponto $P_o = \big(x_o, y_o, g(x_o, y_o)\big)$ tem sua direção dada pelo vetor normal $\vec{n}_{P_o} = \langle g_x(x_o, y_o)\,, g_y(x_o, y_o)\,, -1\rangle$ e, como por hipótese temos $\frac{\partial F}{\partial z}(P_o) \neq 0$, o plano π tem também a direção do vetor

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_o)\vec{n}_{P_o} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial z}(P_o)\frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o)\,, \frac{\partial F}{\partial z}(P_o)\frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o)\,, -\frac{\partial F}{\partial z}(P_o)\right\rangle \ .$$

Finalmente, pelo item (a) temos o par de equações,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_o)\frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o) = -\frac{\partial F}{\partial x}(P_o) \qquad , \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(P_o)\frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o) = -\frac{\partial F}{\partial y}(P_o) \ ,$$

e consequentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_o)\vec{n}_{P_o} = \left\langle -\frac{\partial F}{\partial x}(P_o)\,, -\frac{\partial F}{\partial y}(P_o)\,, -\frac{\partial F}{\partial z}(P_o)\right\rangle = -\vec{\nabla}F(P_o) \ \blacksquare$$

Teorema 2 Seja $F(x, y, z)$ de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e seja $P_o = (x_o, y_o, z_o) \in \Omega$, com $F(x_o, y_o, z_o) = 0$. Nestas condições, se $\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq 0$, então existirão um retângulo aberto $I \times J$ centrado em (x_o, y_o) e um intervalo aberto V, $z_o \in V$, tais que para cada $(x, y) \in I \times J$, $\exists\,!\ \ g(x, y) \in V$ com $F(x, y, z) = 0$. A função $z = g(x, y)$, $(x, y) \in I \times J$, é diferenciável, e de classe C^1, e:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \ .$$

Antes de iniciarmos a prova deste teorema teçamos algumas **observações:**

(1) Como no Teorema 1, consideremos Ω suficientemente pequeno e convexo tal que $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$ em Ω. Desta forma, vale a unicidade: $F(x, y, z_1) = F(x, y, z_2) \ \Rightarrow\ z_1 = z_2$.

(2) Como no Teorema 1, basta mostrarmos que em todo ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o) \in \Omega$ existe uma solução local diferenciável em (x_o, y_o), para concluirmos que a solução g obtida é diferenciável em todo o seu domínio.

Demonstração do Teorema:

Existência:

Consideremos (vide Figura 6 abaixo) um paralelepípedo aberto $I \times J \times (z_1, z_2)$, centrado em $P_o = (x_o, y_o, z_o)$, suficientemente pequeno tal que seu fecho esteja contido em Ω. Como $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$, segue que $F(x_o, y_o, z_1) < 0 = F(x_o, y_o, z_o) < F(x_o, y_o, z_2)$; assim, devido à continuidade de F, podemos supor, sem perda de generalidade, que I e J são suficientemente pequenos tais que a restrição de F a $I \times J \times \{z_1\}$ é negativa e a restrição de F a $I \times J \times \{z_2\}$ é positiva.

Fixando agora $(x, y) \in I \times J$ e considerando a função $\varphi(z) = F(x, y, z)$, com $z \in [z_1, z_2]$, temos que φ é contínua, estritamente crescente (pois tem derivada estritamente positiva), e ainda mais $\varphi(z_1) < 0$ e $\varphi(z_2) > 0$. Logo, existe um único número $z = g(x, y) \in (z_1, z_2)$ tal que $\varphi(g(x, y)) = F(x, y, g(x, y)) = 0$. Seja então g assim definida, $g : I \times J \mapsto (z_1, z_2)$.

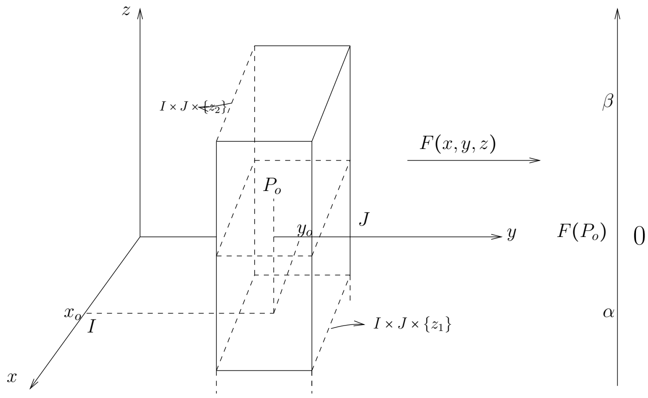

Figura 6: Teorema 2 das Funções Implícitas

Continuidade em (x_o, y_o):

Procedendo como acima temos que para todos $\bar{z_1}$ e $\bar{z_2}$, com $z_1 < \bar{z_1} < z_o < \bar{z_2} < z_2$, determinamos um retângulo aberto $I_1 \times I_2$, centrado em (x_o, y_o), tal que

$$(x, y) \in I_1 \times J_1 \;\Rightarrow g(x, y) \in (\bar{z_1}, \bar{z_2}).$$

Logo, g é contínua em (x_o, y_o).

Diferenciabilidade em (x_o, y_o):

Pela Lema 1, afirmação (3), existe uma terna de funções $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \varphi$ definidas em Ω, a valores reais, tais que:

$$\begin{array}{lll} (T2.1) & F(x,y,z) & = F(x_o, y_o, z_o) \\ & & +F_x(x_o,y_o,z_o)(x-x_o) + F_y(x_o,y_o,z_o)(y-y_o) + F_z(x_o,y_o,z_o)(z-z_o) \\ & & +\varphi_1(x,y,z)(x-x_o) + \varphi_2(x,y,z)(y-y_o) + \varphi_3(x,y,z)(z-z_o) \end{array}$$

satisfazendo

$$(T2.2) \qquad \lim_{(x,y,z)\to(x_o,y_o,z_o)} \varphi_i(x,y,z) = 0 \;;\; i = 1,2,3.$$

Substituindo $z = g(x,y)$ e $z_o = g(x_o, y_o)$ na expressão (T2.1) para a função F e notando que $F(x, y, g(x, y)) = F(x_o, y_o, z_o) = F(P_o) = 0, \forall\; (x, y) \in I \times J$, temos:

$$\begin{array}{llll} (T2.3) & 0 & = & F_x(P_o)(x-x_o) + F_y(P_o)(y-y_o) + F_z(P_o)[g(x,y) - g(x_o,y_o)] \\ & & + & \varphi_1(x,y,g(x,y))(x-x_o) + \varphi_2(x,y,g(x,y))(y-y_o) \\ & & + & \varphi_3(x,y,g(x,y))[g(x,y) - g(x_o,y_o)]; \end{array}$$

e definindo então

$$(T2.4) \qquad \begin{cases} \eta(x,y) & = F_z(P_o) + \varphi_3(x,y,g(x,y)) \\ \bar{\varphi_1}(x,y) & = \varphi_1(x,y,g(x,y)) \\ \bar{\varphi_2}(x,y) & = \varphi_2(x,y,g(x,y)), \end{cases}$$

temos, utilizando as equações em (T2.2) e que g é contínua em (x_o, y_o),

$$(T2.5) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \eta(x,y) & = F_z(P_o) \neq 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \bar{\varphi_1}(x,y) & = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \bar{\varphi_2}(x,y) & = 0 \ . \end{cases}$$

e substituindo as expressões em (T2.4) na equação (T2.3) obtemos

$$\begin{aligned} (T2.6) \qquad 0 \ & = F_x(P_o)(x - x_o) + F_y(P_o)(y - y_o) + \eta(x,y)[g(x,y) - g(x_o,y_o)] \\ & + \bar{\varphi_1}(x,y)(x - x_o) + \bar{\varphi_2}(x,y)(y - y_o) \end{aligned}$$

e, dividindo (T2.6) por $\eta = \eta(x,y)$, admitindo (x,y) próximo de (x_o, y_o), encontramos,

$$(T2.7) \quad g(x,y) - g(x_o,y_o) = -\frac{F_x(P_o)}{\eta}(x - x_o) - \frac{F_y(P_o)}{\eta}(y - y_o) - \frac{\bar{\varphi_1}}{\eta}(x - x_o) - \frac{\bar{\varphi_2}}{\eta}(y - y_o) \ ;$$

a qual pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} g(x,y) - g(x_o,y_o) \ & = -\tfrac{F_x(P_o)}{F_z(P_o)}(x - x_o) - \tfrac{F_y(P_o)}{F_z(P_o)}(y - y_o) \ + \\ & + \left[\tfrac{F_x(P_o)}{F_z(P_o)} - \tfrac{F_x(P_o)}{\eta} - \tfrac{\bar{\varphi_1}}{\eta}\right].(x - x_o) + \left[\tfrac{F_y(P_o)}{F_z(P_o)} - \tfrac{F_y(P_o)}{\eta} - \tfrac{\bar{\varphi_2}}{\eta}\right].(y - y_o) = \\ & = -\tfrac{F_x(P_o)}{F_z(P_o)}(x - x_o) - \tfrac{F_y(P_o)}{F_z(P_o)}(y - y_o) + \psi_1(x,y)(x - x_o) + \psi_2(x,y)(y - y_o) \,, \end{aligned}$$

com as condições, vide (T2.5),

$$\begin{cases} \psi_1 = \tfrac{F_x(P_0)}{F_z(P_o)} - \tfrac{F_x(P_o)}{\eta} - \tfrac{\bar{\varphi_1}}{\eta} \ , & \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \psi_1(x,y) = 0 \\ \psi_2 = \tfrac{F_y(P_0)}{F_z(P_o)} - \tfrac{F_y(P_o)}{\eta} - \tfrac{\bar{\varphi_2}}{\eta} \ , & \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \psi_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

Então, pelo Lema 1(3), e observações logo após sua demonstração, g é diferenciável em (x_o, y_o) e valem as fórmulas enunciadas para suas derivadas parciais em (x_o, y_o) ■

Exemplo 6: Ache pontos $(x_o, y_o, z_o) \in \mathbb{R}^3$ tais que a equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ tenha soluções implicítas diferenciáveis $z = z(x,y)$ em uma bola aberta contendo (x_o, y_o) e tais que $z(x_o, y_o) = z_o$. Compute $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Resolução:

Consideremos a superfície de nível zero de $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$. Temos,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 1 \ ,$$

e $F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ se $z_o \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Então, pelo Teorema 2, se $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ pertence à superfície $F^{-1}(0)$ e $z_o \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, existe uma função $z = z(x,y)$ como desejada.

Ainda mais, derivando parcialmente a equação

$$x^3 + y^3 + z^3(x,y) - x - y - z(x,y) = 0 \,,$$

obtemos

$$3x^2 + 3z^2(x,y)z_x - 1 - z_x = 0 \quad , \quad 3y^2 + 3z^2(x,y)z_y - 1 - z_y = 0 \ .$$

Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{1-3x^2}{3z^2(x,y)-1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{1-3y^2}{3z^2(x,y)-1} \quad \blacksquare$$

Exemplo 7: Se $y = y(x)$ e $z = z(x)$, $x \in I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, são soluções implicítas de

$$(S1) \qquad \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \ , \end{cases}$$

com F e G diferenciáveis num aberto de $\mathbb{R}^3$, compute as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ (em função das derivadas parciais de F e G).

Resolução:

Por hipótese temos,

$$(S2) \qquad F\big(x,y(x),z(x)\big) = 0 \quad \text{e} \quad G\big(x,y(x),z(x)\big) = 0 \qquad ,$$

e portanto a curva $\gamma(x) = \big(x,y(x),z(x)\big)$, $x \in I = (a,b)$, está contida na intersecção das superfícies de nível zero de F e de G: $F(x,y,z) = 0$ e $G(x,y,z) = 0$.

Obtemos $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ derivando as equações em (S2) em relação à variável x:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \, , \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x} \, , \end{cases}$$

cuja solução é dada pela Regra de Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad ,$$

para todo $x \in (a,b)$ tal que $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$ no ponto $\gamma(x) = \big(x,y(x),z(x)\big)$.

Notação: O **determinante jacobiano** de F e G em relação a y e a z, nesta ordem, é:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \ .$$

De forma análoga indicamos os determinantes jacobianos de F e G em relação a x e z (nesta ordem) e em relação a y e x (nesta ordem). Com tais notações temos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

Exemplo 8: Seja $g(u,v) = f(x,y)$, com $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ dadas implicitamente:

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \ . \end{cases}$$

Suponha $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(a) Mostre que $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial u}$.

(b) Compute $\frac{\partial g}{\partial u}$.

(c) Mostre que f é constante sobre as hipérboles $xy = c$.

Resolução:

(a) Temos $v = x(u,v).y(y,v)$, $\forall(u,v)$. Portanto, derivando tal equação em relação a u temos,

$$0 = y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} \ ,$$

donde segue (a).

(b) Pela regra da cadeia temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}\Big(-\frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial u}\Big) \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{x}\Big(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\frac{\partial x}{\partial u} \ . \end{aligned}$$

Então, como $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, segue que $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$.

(c) Seja $c \in \mathbb{R}$ fixado e $\gamma(x) = \big(x, \frac{c}{x}\big)$, $x \neq 0$, uma parametrização da hipérbole $xy = c$. Seja ainda, $\varphi(x) = f\big(x, \frac{c}{x}\big)$ a restrição de f sobre a hipérbole. Então, utilizando que $xy = c$ na segunda igualdade abaixo,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x, \frac{c}{x}\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, \frac{c}{x}\Big).\Big(\frac{-c}{x^2}\Big) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{xy}{x^2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{1}{x}\Big[x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\Big](x,y) = 0 \ . \end{aligned}$$

Portanto, f é constante sobre as hipérboles $xy = c$ ∎

Exemplo 9: Seja $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ dadas implicitamente pelo sistema

$$(S) \qquad \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \ . \end{cases}$$

(a) Compute $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$ em termos de x e y.

(b) Determine um par de funções $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ soluções implícitas de (S).

Resolução:

(a) Derivando as duas equações de (S) em relação à variável u obtemos,

$$\begin{cases} 1 = 2x\frac{\partial x}{\partial u} + 2y\frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} \ . \end{cases}$$

Neste último sistema, multiplicando a primeira equação por x, a 2 por $-2y$ e então somando-as obtemos x_u. Analogamente, multiplicando a 1 equação por $-y$, a segunda por $2x$ e somando-as obtemos y_u. Assim,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(x^2 - y^2)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{2(x^2 - y^2)} \ .$$

(b) Do sistema (S) temos,

$$\begin{cases} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = u + 2v \\ (x-y)^2 = x^2 - 2xu + v^2 = u - 2v \ , \end{cases}$$

e pela escolha de sinais abaixo ao extrairmos as raízes quadradas no sistema acima,

$$x + y = +\sqrt{u + 2v} \qquad , \qquad x - y = -\sqrt{u - v} \ .$$

Donde,

$$\begin{cases} x = x(u,v) = \frac{\sqrt{u+2v} - \sqrt{u-2v}}{2} \\ y = y(u,v) = \frac{\sqrt{u+2v} + \sqrt{u-2v}}{2} \end{cases} \quad \blacksquare$$

No teorema abaixo utilizamos a notação introduzida no Exemplo 7 para o determinate jacobiano de duas funções em relação a duas de suas variáveis.

Teorema 3 Consideremos $F(x,y,z)$ e $G(x,y,z)$, ambas de classe C^1 no aberto $\Omega \subset R^3$ e seja $P_o = (x_o, y_o, z_o) \in \Omega$, com $F(x_o,y_o,z_o) = 0$ e $G(x_o,y_o,z_o) = 0$. Nestas condições, se

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_o,y_o,z_o) \neq 0,$$

então existem um intervalo aberto I, contendo x_o, e um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ de classe C^1 em I, tais que $F(x,y(x),z(x)) = G(x,y(x),z(x)) = 0$, $\forall x \in I$; além disso, $y_o = y(x_o)$ e $z_o = z(x_o)$. Tem-se ainda:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}};$$

sendo os determinantes jacobianos calculados em $(x, y(x), z(x)), x \in I$.

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$ é não nulo em Ω. Suponhamos ainda, também sem perda de generalidade, que $\frac{\partial F}{\partial z}(x_o,y_o,z_o) \neq 0$. Pelo Teorema 2 a equação $F(x,y,z)=0$ define implicitamente uma função $z=g(x,y),(x,y)\in V$, sendo g de classe C^1 em uma bola aberta V, centrada em (x_o,y_o) e $z_o=g(x_o,y_o)$. Analisemos, agora, a função $H(x,y)=G(x,y,g(x,y)),\ (x,y)\in V$. É fácil ver que H é de classe C^1, $H(x_o,y_o)=0$ e $\frac{\partial H}{\partial y}(x_o,y_o)\neq 0$ pois, lembrando que o Teorema 2 estabelece $\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial y}(x_o,y_o) &= \frac{\partial G}{\partial y}(x_o,y_o,g(x_o,y_o)+\frac{\partial G}{\partial z}(x_o,y_o,g(x_o,y_o)\frac{\partial g}{\partial y}(x_o,y_o)\\
&= \frac{\partial G}{\partial y}(x_o,y_o,g(x_o,y_o))-\frac{\partial G}{\partial z}(x_o,y_o,g(x_o,y_o))\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_o,y_o,g(x_o,y_o))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_o,y_o,g(x_o,y_o))}\\
&= \frac{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x_o,y_o,g(x_o,y_o))\\
&= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_o,y_o,z_o)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_o,y_o,z_o)}\neq 0\ .
\end{aligned}$$

Consequentemente a equação $H(x,y)=0$, ou $G(x,y,g(x,y))=0$, define implicitamente uma função $y=y(x),x\in I$, de classe C^1 no intervalo I e $y_o=y(x_o)$. Para completarmos a prova definamos $z(x)=g(x,y(x)),x\in I$ e passemos à verificação das propriedades requeridas. Obviamente temos que $G(x,y(x),z(x))=0$, $F(x,y(x),z(x))=0$, $y(x_o)=y_o$ e $z(x_o)=g(x_o,y_o)=z_o$.

Para obtermos as fórmulas para as derivadas de $y=y(x)$ e $z=z(x)$, derivemos em relação à variável x as equações $G(x,y(x),z(x))=0$ e $z(x)=g(x,y(x))$, obtendo então o sistema abaixo, já utilizando as expressões para $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ estabelecidas no Teorema 2,

$$(T3.1)\qquad \begin{cases} 0=\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx}\\ \frac{dz}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\frac{dy}{dx}\ . \end{cases}$$

No sistema (T3.1), substituindo a segunda equação na primeira equação, encontramos

$$0=\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx}-\frac{\frac{\partial G}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right],$$

e multiplicando esta última por $\frac{\partial F}{\partial z}$ obtemos

$$0=\left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}$$

donde segue: $0=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\frac{dy}{dx}$. Isto é,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\ .$$

Para encontrarmos a expressão para $\frac{dz}{dx}$, substituímos a encontrada para $\frac{dy}{dx}$ na primeira equação do sistema (T3.1) acima determinado. Assim procedendo obtemos:

$$0=G_x-G_y\left[\frac{F_xG_z-F_zG_x}{F_yG_z-F_zG_y}\right]+G_z\frac{dz}{dx}\,;$$

donde, multiplicando por $(F_y G_z - F_z G_y)$:

$$0 = G_x(F_y G_z - F_z G_y) - G_y(F_x G_z - F_z G_x) + G_z(F_y G_z - F_z G_y)\frac{dz}{dx}$$

agora, primeiro cancelando os termos $G_x F_z G_y$ e em seguida dividindo por G_z, o qual também podemos supor não nulo (sem perda de generalidade), concluímos que

$$0 = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} .$$

Finalmente, basta observarmos que $z(x)$ é uma função de classe C^1 pois $z(x) = g(x, y(x))$, sendo que $g = g(x,y)$ e $y(x)$ são funções de classe C^1 ■