APOIO 3 - ELIPSE - CÁLCULO II -

Bacharelado Química - Diurno

2^o SEMESTRE de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

1. Se $r = \langle x, y\rangle$, $r_1 = \langle x_1, y_1\rangle$, $r_2 = \langle x_2, y_2\rangle$, descreva o conjunto dos pontos r tais que,

$$|r - r_1| + |r - r_2| = R,\ R > |r_1 - r_2| \ .$$

Solução Antes de tudo, atentemos para a geometria para então simplificar a equação.

Chamemos s a reta por r_1 e r_2 (desenhe) e $C = \frac{r_1+r_2}{2}$ o ponto médio entre r_1 e r_2.

Trace por C a reta t, perpend. a s e mediatriz de $\overline{r_1 r_2}$ (pontos equidistam de r_1 e r_2).

Só há 2 pontos em t com soma das distâncias a r_1 e r_2 igual a R (distam $\frac{R}{2}$ de r_1 ou r_2).

Eles são simétricos em relação à reta s, por r_1 e r_2.

Desenhando é fácil ver, por semelhança de triângulos, que se r é um ponto da figura ($|r - r_1| + |r - r_2| = R$), r', o seu simétrico em relação a s, satisfaz a mesma equação. Logo, a figura a determinar é simétrica em relação a s.

Para o mesmo r, o ponto r'', simétrico de r em relação a t (perpend. a $\overline{r_1 r_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias a r_1 e r_2 é R.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares (t e s) e, um centro ($C = \frac{r_1+r_2}{2}$) e para desenhá-la basta fazê-lo em um quadrante e então refletir em relação a t e s.

Seja x a reta t, y a reta s e adotemos $C\frac{r_1+r_2}{2}$ como origem do sist. de coordenadas.

Nesse sistema: $r_1 = (\pm c, 0)$, $r_2 = (\mp c, 0)$. Suponhamos $c > 0$, $r_1 = (c, 0)$ e $r_2 = (-c, 0)$.

Assim, a equação adquire a forma:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = R \ .$$

Agora, confio que vocês conseguem chegar ao formato padrão:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$