CÁLCULO II - MAT 2127

Bacharelado Química - 2 SEMESTRE de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

DÚVIDAS

(21) (L6) Determine o ponto do plano $3x+2y+z=12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja mínima.

Resolução:

Geometricamente, se K é uma bola fechada que contém os pontos dados e intersecta o plano dado, o ponto procurado pertence a K e é então o mínimo absoluto da função $D(x,y,z)=(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ restrita ao compacto K. O Teorema de Weierstrass assegura a existência de tal mínimo.

Pelo Teorema 2 os extremantes de $D(x,y,z)$ com a restrição $3x+2y+z=12$ satisfazem:

$$\vec{\nabla} D(x,y,z)=\lambda\langle 3,2,1\rangle\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\,,$$

ou, eliminando o parâmetro λ,

$$\vec{0}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x+2(x-1) & 2y+2(y-1) & 2z+2(z-1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\ .$$

Desta forma é claro que desenvolvendo o segundo determinante pela primeira linha temos, $(2y-1-4z+2)\vec{i}-(2x-1-6z+3)\vec{j}+(4x-2-6y+3)\vec{k}=\vec{0}$ e portanto, $2y=4z-1$ e $x=3z-1$; donde, substituindo na equação do plano, obtemos $3(3z-1)+(4z-1)+z=12$ e $z=\frac{16}{14}$, $y=\frac{25}{14}$ e $x=\frac{34}{14}$. Logo, o ponto procurado é $P_o=\left(\frac{34}{14},\frac{25}{14},\frac{16}{14}\right)$.

Atenção: neste caso também podemos eliminar λ mais simplesmente com as equações

$$\frac{2x+2(x-1)}{3}=\frac{2y+2(y-1)}{2}=\frac{2z+2(z-1)}{1}\quad(=\lambda)\qquad\blacksquare$$