PROVA SUBSTITUTIVA DE CÁLCULO III - IMEUSP - MAT211

04 de julho de 2012

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ______________________________

N$^{\underline{o}}$USP : ______________________________

Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Escolha 5 entre as 6 questões. Desenhe as figuras apropriadas.
Justifique todas as passagens
BOA SORTE!

1. Ache os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1 \ .$$

2. As três equações

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 & = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 & = 2 \\ xy - (\sin u)(\cos v) + z & = 0\,, \end{cases}$$

definem x, y e z, como funções de u e v. Calcule as derivadas parciais

$$\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial v}$$

no ponto $x = y = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$, $z = 0$.

Resolução.

Componhamos a aplicação em cinco variáveis e a valores em $\mathbb{R}^3$

$F(u,v,x,y,z) = (x^2 - y\cos(uv) + z^2, x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2, xy - (\sin u)(\cos v) + z$

com a aplicação em duas variáveis e a valores em $\mathbb{R}^5$

$$\varphi(u,v) = ((u, v, x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

É óbvio que temos $F \circ \varphi \equiv (0,2,0)$. Então, nos pontos considerados a matriz jacobiana de tal composição satisfaz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}_{5\times 2} = [O]_{3\times 2}.$$

Temos então, efetuando o produto matricial convenientemente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}_{3\times 2} = [O]_{3\times 2}$$

Donde então segue que

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prosseguindo com tal cômputo obtemos: $x_u(\pi/2, 0) = 0$ e $x_v(\pi/2, 0) = -\pi/12$.

Solução prática. Derivando parcialmente as equações do sistema dado em relação às variáveis u e v nos pontos considerados e então resolva o sistema linear obtido. Por exemplo, derivando a primeira equação em relação a u obtemos

$$2xx_u - y_u\cos(uv) + yv\sin(uv) + 2zz_u = 0.$$

No ponto considerado obtemos

$$2x_u - y_u = 0$$

Derivando a segunda equação em relação a u no ponto considerado obtemos

$$2x_u + 2y_u = 0.$$

Assim, temos $x_u(\pi/2, 0) = 0$. Analogamente obtemos $x_v(\pi/2, 0)$■

3. Calcule

$$\iiint_K \sqrt{x^2+y^2-z}\,dxdydz,$$

onde

$$K = \Big\{(x,y,z) : 0 \le y \le x\,,\ 0 \le x \le 1 \ \text{ and } \ 0 \le z \le x^2+y^2\Big\}.$$

4. Seja

$$\overrightarrow{F}(x,y) = x^3y^3\overrightarrow{i} + (3y - \frac{3}{4}x^2y^4)\overrightarrow{j}$$

e seja

$$\gamma(t) = (t^3, \sin(4\arctan t^2)\,),\ \text{com } 0 \le t \le 1.$$

Seja α a área do conjunto limitado pelo eixo x e pela curva γ. Calcule

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,ds,$$

onde $\overrightarrow{n}$ é a normal unitária a γ que aponta para fora do conjunto mencionado.

5. Seja σ o gráfico de

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \text{ com } x^2 + y^2 \leq 1,$$

e $\overrightarrow{n}$ a normal unitária a σ com terceira componente ≤ 0. Seja

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2y\,\overrightarrow{i} - xy^2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Calcule

$$\iint_\sigma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\,dS.$$

6. Seja

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^3\overrightarrow{k}$$

e σ a superfície

$$z = y + 4, \quad \text{com} \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$$

e normal unitária $\overrightarrow{n}$ apontando para baixo.

Calcule

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS.$$