1ª PROVA DE CÁLCULO III - IMEUSP - MAT211

9 de abril, 2012

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Extra	
Total	

Nome : ____

Nº USP : ____

Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Escolha 5 questões entre as 6 primeiras questões.
Justifique todas as passagens
BOA SORTE!

1. Seja $\alpha > 0$. Considere, no plano exceto a origem, o escoamento

$$\vec{v}(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^\alpha}\vec{i} + \frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\vec{j}.$$

   (a) Compute $\mathrm{rot}\,\vec{v}(x,y)$.

   (b) Defina um campo irrotacional.

   (c) Existem valores de $\alpha > 0$ tal que o escoamento analisado é irrotacional ? Se houver, determine-os.

2. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j} = \frac{-y}{x^2=y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}\,,\; (x,y) \neq (0,0)$.

   (a) Compute $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, para $(x,y) \neq (0,0)$. Vale a igualdade destas derivadas parciais?

   (b) Compute $\int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$, onde $\gamma(t) = (\cos t\,, \sin t)\,, t \in [0, 2\pi]$.

   (c) Defina um campo conservativo.

   (d) O campo $\overrightarrow{F}$ é conservativo ? Por que?

3. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$. Todas as funções abaixo consideradas são de classe C^1. Consideremos um fluido em escoamento em Ω, com Ω sem fontes ou sorvedouros.

   Suponhamos que o escoamento tem velocidade $\overrightarrow{v}(x, y, z, t)$ na posição (x, y, z) e no instante $t \in \mathbb{R}$. Suponhamos ainda que $\rho(x, y, z, t)$ é a densidade do fluido na posição (x, y, z) e no instante t.

   (a) Qual a equação da continuidade ?

   (b) Defina fluido incompressível. Qual a equação da continuidade para tal fluido?

   A seguir, suponha que $\overrightarrow{v}$ independe do tempo [isto é, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x, y, z)$] e derive de um potencial $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ [isto é, $\nabla\varphi = \overrightarrow{v}$].

   (c) Mostre que o campo $\overrightarrow{v}$ é irrotacional.

   (d) Mostre que se o fluído for incompressivel então $\Delta\varphi = 0$ [ou, dito de outra forma, $\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = 0$].

4. Determine os pontos de máximo e de mínimo, e seus respectivos valores, de $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre a curva de intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Faça um esboço das figuras envolvidas.

5. Dada $f(x,y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes de f e os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f no quadrado

$$K = [-1,+1] \times [-1,+1] = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 1\Big\}.$$

6. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por,

$$F(x, y) = (u, v) \text{ com } (u, v) = (x^4y + x, x + y^3).$$

(a) Mostre que F é inversível em uma vizinhança do ponto $(1, 1)$ [isto é, em um aberto que contém o ponto $(1, 1)$] e que sua função inversa G é de classe C^1 em uma vizinhança do ponto $F(1, 1) = (u_0, v_0)$. Determine (u_0, v_0).

(b) Determine $\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0)$.

EXTRA.

(a) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(b) Enuncie o Teorema da Função Implícita para uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(c) Utilizando o teorema enunciado em (a), prove o teorema enunciado em (b).