

MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS E MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Definições: Seja $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\text{Dom}(f)$ um aberto em \mathbb{R}^n , n arbitrário em \mathbb{N} . Dizemos que o ponto P_0 em $\text{Dom}(f)$ é:

- Ponto crítico, ou estacionário, de f se $\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}$.
- Ponto de máximo [mínimo] local de f se existe uma bola aberta $B(P_0; r)$, de centro P_0 e raio $r > 0$, tal que $f(P_0) \geq f(P)$ [$f(P_0) \leq f(P)$], para todo ponto P na intersecção $B(P_0; r) \cap \text{Dom}(f)$.
- Extremante local de f se é ponto de máximo [mínimo] local de f .
- Extremante local de f em um subconjunto A de $\text{Dom}(f)$, se P_0 está em A e P_0 é ponto de máximo[mínimo] local da função f restrita a A .

Teorema 1. *Seja Ω um aberto em \mathbb{R}^2 . Sejam f e g duas funções em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$ e $L = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$, a curva de nível zero de g , com $\vec{\nabla} g(x, y) \neq \vec{0}$, para todo (x, y) em L . Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ em L um ponto de máximo, ou mínimo, local de f em L . Então, existe λ em \mathbb{R} tal que*

$$(1.1) \quad \vec{\nabla} f(P_0) = \lambda \vec{\nabla} g(P_0).$$

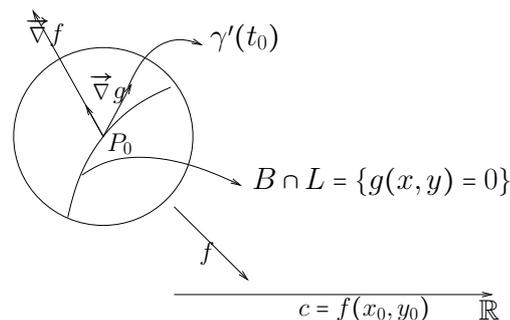


Figura 1: Teorema de Lagrange no Plano

Prova. Vide Figura 1.

Localmente, no ponto P_0 , pelo Teorema da Função Implícita segue que L é parametrizável como uma curva $\gamma(t)$, com t em uma vinhança de zero, com $\gamma(0) = P_0$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$. Assim, a função $(f \circ \gamma)(t)$ têm extremante em $t = 0$. Donde segue $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ e pela regra da cadeia obtemos $\vec{\nabla} f(P_0) \perp \gamma'(0)$. Porém, também são válidas as relações:

$$g \circ \gamma \equiv 0, \quad \vec{\nabla} g(P_0) \perp \gamma'(0), \quad \gamma'(0) \neq \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} g(P_0) \neq \vec{0}.$$

Portanto, o vetor $\vec{\nabla} f(P_0)$ é paralelo ao vetor não nulo $\vec{\nabla} g(P_0)$. Donde concluimos a tese ■

Interpretações Geométricas para o Teorema de Lagrange (acima).

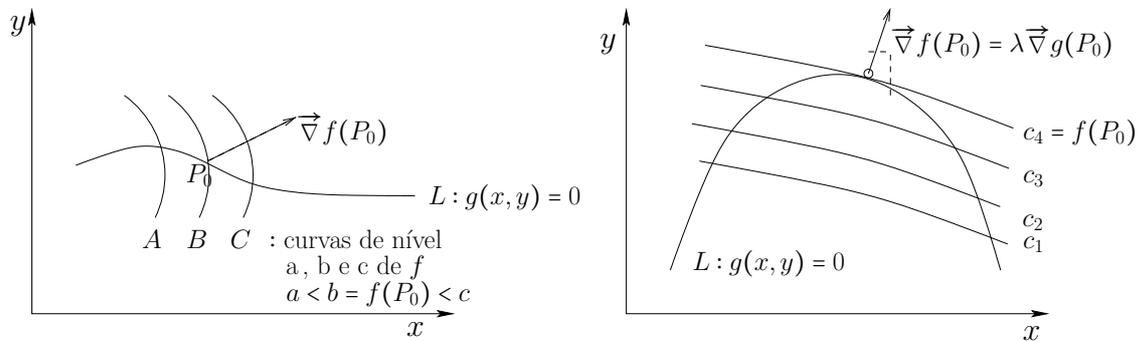


Figura 2: Ilustrações 2A e 2B (complementares) para o Teorema de Lagrange

Interpretação para Figura 2-A (à esquerda).

Suponha que $\vec{\nabla} f(P_0) \neq \vec{0}$ é oblíquo a L em P_0 . Então, a curva C de nível $f(P_0)$, de f , cruza a curva L e as curvas de nível c , de f , com $c \approx f(P_0)$ [i.e., c próximo a $f(P_0)$], cujos gráficos próximos a C , também cruzam L e, orientando-as na direção de crescimento de c (a direção do gradiente) vemos que P_0 não é ponto de máximo, nem ponto de mínimo, local de f em L , contra a hipótese. Portanto, o gradiente $\vec{\nabla} f(P_0)$ é ortogonal a L , assim como o gradiente $\vec{\nabla} g(P_0)$. Logo, o vetor $\vec{\nabla} f(P_0)$ é paralelo a $\vec{\nabla} g(P_0)$.

Interpretação para Figura 2-B (à direita): Representemos as curvas de nível $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 = f(x_0, y_0) = f(P_0)$ no sentido de crescimento do gradiente de f (pois f cresce na direção do gradiente). É claro que o valor máximo de f sobre a curva $L = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$, corresponde ao maior valor c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepta a curva L . Em tal ponto P_0 de intersecção tais curvas tem mesma reta tangente e assim mesma reta normal, as quais a priori tem direção $\vec{\nabla} f(P_0)$ e $\vec{\nabla} g(P_0)$ (Figura 2-B), respectivamente. Logo, tais vetores são paralelos e o vetor $\vec{\nabla} f(P_0)$ é um múltiplo de $\vec{\nabla} g(P_0)$ já que este é não nulo.

Observações. Mantenhamos a notação do Teorema 1 e sua demonstração.

(1) Suponhamos que P_0 é ponto crítico de f e $\lambda = 0$. Então, temos

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0} = \lambda \vec{\nabla} g(P_0)$$

apesar que não existe um número λ tal que $\vec{0} \neq \vec{\nabla} g(P_0) = \lambda \vec{\nabla} f(P_0)$. Neste particular sentido, concluímos que a equação (1.1) é a melhor possível.

- (2) Pontos críticos de f pertencentes a L , são **candidatos** a extremantes locais de f restrita a L .
- (3) Se $\vec{\nabla} f \neq \vec{0}$ para todo (x, y) , localmente parametrizamos a curva de nível $c = f(P_0)$, de f , por uma curva δ , com $\delta' \neq \vec{0}$. Esta curva tem vetor tangente ortogonal a $\vec{\nabla} f(P_0)$. Logo,

$$\delta'(P_0) \perp \vec{\nabla} g(P_0).$$

Assim, no ponto P_0 , visto que os vetores tangentes δ' e γ' são não nulos e ortogonais a $\vec{\nabla} g(P_0)$, vemos que δ' e γ' são múltiplos um do outro. Portanto, as curvas $L = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ e a de nível $c = f(P_0)$ da função f , tangenciam-se no ponto P_0 .

(4) Os extremantes surgem do sistema abaixo, dado por uma equação vetorial e uma equação escalar,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

equivalente ao sistema abaixo, que apresenta três equações escalares e três incógnitas x , y e λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

(5) Na equação (1.1), é possível eliminar o parâmetro λ trivialmente (mas a conveniência depende do problema). De fato, a resolubilidade da equação

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \lambda \vec{\nabla} g(P_0)$$

equivale à resolubilidade da equação

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} (P_0) = 0.$$

A questão da determinação dos extremantes locais de f sobre a curva $\{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ é usualmente referida como o problema da determinação dos máximos e mínimos de f sujeita à restrição $g(x, y) = 0$ ou, dos máximos e mínimos condicionados de f sujeita à condição $g(x, y) = 0$.

Para aplicarmos o Método dos Multiplicadores de Lagrange são necessários os conceitos abaixo.

Definições Topológicas. Sejam A e K dois subconjuntos de \mathbb{R}^n .

- A é fechado se seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus \{A\} = A^c$ é aberto.
- K é compacto se é fechado e limitado.

Segue um teorema fundamental para estudo de máximos e mínimos.

Teorema (Weierstrass). *Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, K um subconjunto compacto em \mathbb{R}^n . Então, f assume valor máximo absoluto e valor mínimo absoluto em K .*

Prova. Inicialmente, mostremos que f é limitada.

- f é limitada. Suponhamos, por contradição, que f é ilimitada. Visto que K é limitado, temos que K está contido em um cubo fechado $C = C_0$ em \mathbb{R}^n , de faces paralelas aos planos coordenados, e de aresta de comprimento L . Particionemos este cubo em 2^n cubos fechados de faces paralelas aos planos coordenados, de forma natural e trivial. É óbvio que f é ilimitada sobre a intersecção de K com ao menos destes 2^n cubos. Seja C_1 tal cubo. Então, iterando tal argumentação construímos uma sequência C_n , n em \mathbb{N} , de cubos fechados com faces paralelas aos planos coordenados e de arestas de comprimento $L/2^n$, tal que o cubo C_{j+1} está contido em C_j , para todo $j \geq 1$, e tal que f é ilimitada sobre a intersecção $K \cap C_n$. Então, pelo Princípio dos Intervalos Encaixantes [vide *Um Curso de Cálculo*, H. L. Guidorizzi, Vol 1, 5 ed, p. 19] temos que a intersecção de todos estes cubos é dada por um único ponto p em \mathbb{R}^n . Ainda, escolhendo para cada n em \mathbb{N} um ponto x_n na intersecção $C_n \cap K$, temos que $|x_n - p| \leq L\sqrt{2}/2^n$. Logo, $x_n \rightarrow p$ se $n \rightarrow +\infty$. Portanto, como K é fechado, o ponto p pertence a K . Então, como f é contínua em p , temos que existe uma bola aberta $B(p; r)$, centrada em p , com raio $r > 0$, tal que f é limitada sobre $B(p; r) \cap K$. Obviamente existe um cubo C_N contido em tal bola $B(p; r)$. Entretanto, f é ilimitada sobre a intersecção $C_N \cap K$ \nexists
- Existência dos pontos de máximo e mínimo. Como $f(K)$ é limitado em \mathbb{R} , pela propriedade do supremo temos que existem $m = \inf f(K)$, o ínfimo de $f(K)$, e $M = \sup f(K)$, o supremo de $f(K)$. Suponhamos, por contradição, que $f(x) < M$, para todo x em K . Então, a função

$$\frac{1}{M - f(x)}, \quad x \text{ em } K,$$

é contínua e, como consequência da definição de supremo, ilimitada \nexists Assim, existe b em K tal que $f(b) = M$. Analogamente, existe a em K tal que $f(a) = m$ ■

Exemplo 1. Determine a curva de nível da função $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva (um ramo de hipérbole) $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$. Determine também o ponto de tangência.

Solução.

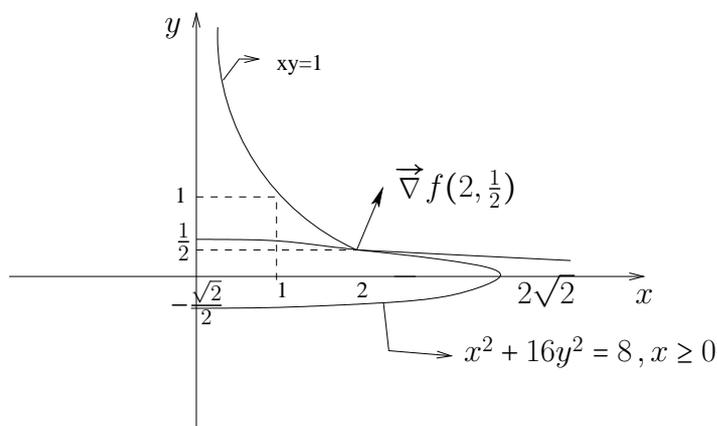


Figura 3: Ilustração ao Exemplo 1

No ponto (x_0, y_0) em que as curvas se tangenciam seus vetores tangentes são paralelos e seus vetores normais também. O vetor normal à curva de nível é o gradiente $\vec{\nabla} f$ e o vetor normal à hipérbole $xy = 1$ é o vetor gradiente da função $g(x, y) = xy$, $\vec{\nabla} g(x_0, y_0) = \langle y_0, x_0 \rangle$, que é não nulo pois $x_0 y_0 = 1$. Temos então, $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e,

$$\langle 2x_0, 32y_0 \rangle = \lambda \langle y_0, x_0 \rangle .$$

Logo, $2x_0 \cdot 32y_0 = \lambda y_0 \cdot \lambda x_0$ e, como $x_0 y_0 = 1$, obtemos $64 = \lambda^2$ e $\lambda = \pm 8$. Porém, como temos $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, a possibilidade $\lambda = -8$ é inaceitável. Desta forma obtemos $x_0 = 4y_0$ e portanto, $1 = x_0 y_0 = 4y_0^2$ e assim encontramos $y_0 = \frac{1}{2}$ e $x_0 = 2$ e o ponto de tangência

$$(x_0, y_0) = \left(2, \frac{1}{2} \right) .$$

A curva de nível é a **elipse** dada por

$$x^2 + 16y^2 = f\left(2, \frac{1}{2}\right) = 4 + 4 = 8 \blacksquare$$

Exemplo 2. Analise os máximos e mínimos de

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2, \quad \text{com a restrição } x^2 + 2y^2 = 1.$$

Solução.

Consideremos a elipse $E = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e também a função $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$. Então, $E = g^{-1}(0)$ e $\vec{\nabla}g = \langle 2x, 4y \rangle \neq \vec{0}$ sobre E . Como f é contínua e E é compacto, pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo sobre E . Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange segue que para tais extremantes existe λ em \mathbb{R} tal que

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \begin{cases} \langle 2x - 2y, -2x + 6y \rangle = \lambda \langle 2x, 4y \rangle \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro λ na primeira equação do sistema à direita temos,

$$\begin{vmatrix} 2x - 2y & 6y - 2x \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y(x - y) - x(3y - x) = 0.$$

Porém, temos $0 = 2(xy - y^2) - (3xy - x^2) = (x - 2y)(x + y)$. Assim, obtemos as soluções $P = (2y, y)$ ou $Q = (-y, y)$. Como P e Q pertencem à elipse concluímos que

$$\begin{cases} (2y)^2 + 2y^2 = 1 \\ \text{ou} \\ y^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \text{ou} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ \text{ou} \\ Q = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{cases}$$

Computemos f em P e em Q . Como $f(-x, -y) = f(x, y)$ temos,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) &= f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2. \end{aligned}$$

Os pontos $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ são de máximo e os pontos $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ são de mínimo ■

Teorema 2. *Sejam f e g funções em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, Ω um aberto em \mathbb{R}^3 . Consideremos a superfície de nível $S = \{P = (x, y, z) \text{ em } \Omega : g(P) = 0\}$, com $\vec{\nabla}g(P) \neq \vec{0}$ para todo P em S . Suponhamos que um ponto P_0 em S é extremante local de f restrita a S . Então, existe um real λ tal que*

$$\vec{\nabla}f(P_0) = \lambda \vec{\nabla}g(P_0) .$$

Interpretação. Análoga a dada no caso planar. Se $\vec{\nabla}f(P_0) \neq \vec{0}$ é oblíquo a S em P_0 (i.e., ao plano π tangente a S em P_0), então a superfície S' de nível $f(P_0)$, de f , cruza S em P_0 e as superfícies de nível c , de f , para valores de c próximos de $f(P_0)$, também cruzam S e orientando-as na direção $\vec{\nabla}f(P_0)$, de crescimento de c , vemos que P_0 não é extremante de f , contra a hipótese. Logo, concluímos que $\vec{\nabla}f(P_0)$ é ortogonal a S , assim como $\vec{\nabla}g(P_0) \neq \vec{0}$. Donde deduzimos que os vetores $\vec{\nabla}f(P_0)$ e $\vec{\nabla}g(P_0)$ são paralelos.

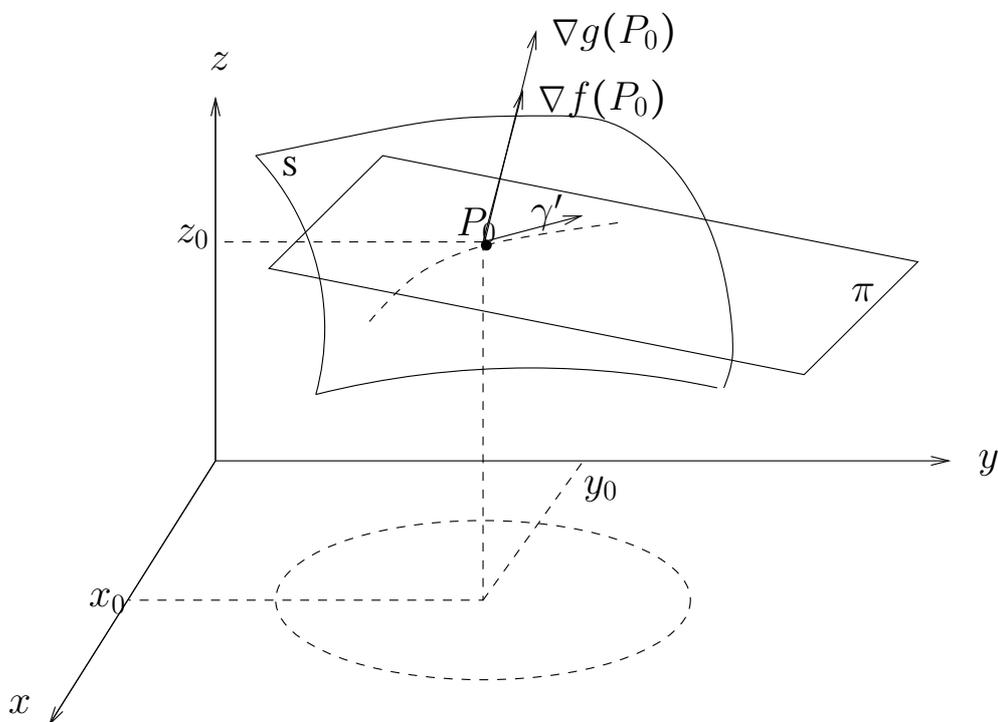


Figura 4: Ilustração ao Teorema 2.

Prova.

Pelo Teorema 2 das Funções Implícitas, S é localmente em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (isto é, em uma bola aberta contendo P_0), dada pelo gráfico de uma função $z = \varphi(x, y)$, com o par (x, y) numa vizinhança de (x_0, y_0) e $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Pelas hipóteses segue que dada uma curva arbitrária γ no gráfico de φ , satisfazendo $\gamma(0) = P_0$, a função $(f \circ \gamma)$ tem máximo ou mínimo em $t = 0$. Portanto, o vetor gradiente $\vec{\nabla} f(P_0)$ é ortogonal ao vetor tangente $\gamma'(0)$. Consequentemente, o vetor $\vec{\nabla} f(P_0)$ é ortogonal ao plano π , tangente ao gráfico de φ no ponto P_0 .

É claro que o vetor $\vec{\nabla} g(P_0)$ também é ortogonal ao gráfico de φ . Logo, ao plano π .

Desta forma, os vetores $\vec{\nabla} f(P_0)$ e $\vec{\nabla} g(P_0)$ são paralelos e, como o vetor $\vec{\nabla} g$ não se anula, concluímos a tese ■

Observação 6. No Teorema 2 também é simples eliminar o parâmetro λ e, novamente, a conveniência depende do problema. A resolubilidade da equação

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \lambda \vec{\nabla} g(P_0)$$

equivale à resolubilidade de

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} (P_0) = \vec{0} .$$

Exemplo 3. Verifique que existe um único ponto P no plano

$$3x + 2y + z = 12$$

cuja soma dos quadrados das distâncias de P a $(0, 0, 0)$ e a $(1, 1, 1)$ é mínima. Determine-o.

Solução.

Geometricamente, se K é um disco fechado e limitado que contém os pontos dados e intersecta o plano π dado, o ponto procurado pertence a $K \cap \pi$ e é então o mínimo absoluto da função (quadrado da distância)

$$D(x, y, z) = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$$

restrita ao compacto $K \cap \pi$. O Teorema de Weierstrass assegura a existência de tal mínimo. Pelo Teorema 2 os extremantes de $D(x, y, z)$ com a restrição $3x + 2y + z = 12$ satisfazem:

$$\vec{\nabla} D(x, y, z) = \lambda \langle 3, 2, 1 \rangle, \quad \lambda \text{ em } \mathbb{R},$$

ou, eliminando o parâmetro λ ,

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x + 2(x - 1) & 2y + 2(y - 1) & 2z + 2(z - 1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x - 1 & 2y - 1 & 2z - 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desta forma é claro que desenvolvendo o segundo determinante pela primeira linha temos, $(2y - 1 - 4z + 2)\vec{i} - (2x - 1 - 6z + 3)\vec{j} + (4x - 2 - 6y + 3)\vec{k} = \vec{0}$ e portanto, $2y = 4z - 1$ e $x = 3z - 1$. Donde, substituindo na equação do plano, obtemos $3(3z - 1) + (4z - 1) + z = 12$. Finalmente,

$$z = \frac{16}{14}, \quad y = \frac{25}{14}, \quad x = \frac{34}{14} \quad \text{e} \quad P_0 = \left(\frac{34}{14}, \frac{25}{14}, \frac{16}{14} \right).$$

Atenção. Neste caso podemos eliminar λ mais simplesmente com as equações

$$\frac{2x + 2(x - 1)}{3} = \frac{2y + 2(y - 1)}{2} = \frac{2z + 2(z - 1)}{1} \quad (= \lambda) \quad \blacksquare$$

Exemplo 4. Consideremos o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

- (a) Determine o ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ no plano π mais próximo à origem.
 (b) Com o método utilizado em (a) mostre que a distância de todo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano é dada pela fórmula:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

1 Solução.

- (a) Geometricamente sabemos que existe tal ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e que $P_1 = (0, 0, 0)$ se $d = 0$. Passemos à determinação do mínimo da função $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância, sujeita à restrição $ax + by + cz + d = 0$. Utilizando multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla}\Phi(P_1) = \langle 2x_1, 2y_1, 2z_1 \rangle = \lambda \langle a, b, c \rangle .$$

Logo, $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = \frac{\lambda}{2} \langle a, b, c \rangle$ e, substituindo tais coordenadas para P_0 na equação para π temos $0 = ax_1 + by_1 + cz_1 + d = \frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + d$.
 Onde, $\frac{\lambda}{2} = -\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}$. Assim, o ponto de π mais próximo à origem é

$$P_1 = -\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} \langle a, b, c \rangle .$$

- (b) Geometricamente é claro que existe em π o ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ mais próximo de $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Claramente, P_2 é ponto de mínimo absoluto da função $\Psi(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ restrita ao plano $ax + by + cz + d = 0$, que avalia o quadrado da distância dos pontos do plano π ao ponto P_0 . Aplicando multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla}\Psi(P_2) = \langle 2(x_2 - x_0), 2(y_2 - y_0), 2(z_2 - z_0) \rangle = \mu \langle a, b, c \rangle .$$

Portanto, $\overrightarrow{P_0P_2} = \frac{\mu}{2} \langle a, b, c \rangle$ e a distância de P_2 ao plano π , dada pelo módulo do vetor $\overrightarrow{P_0P_2}$, é então $\frac{|\mu|}{2} |\langle a, b, c \rangle|$. Visto que $P_2 = P_0 + \frac{\mu}{2} \langle a, b, c \rangle$ pertence a π temos $a(x_0 + \frac{\mu}{2}a) + b(y_0 + \frac{\mu}{2}b) + c(z_0 + \frac{\mu}{2}c) + d = 0$. Onde,

$$\frac{\mu}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) .$$

Finalmente, a distância procurada é

$$\frac{|\mu|}{2} |\langle a, b, c \rangle| = \frac{\frac{|\mu|}{2} (a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

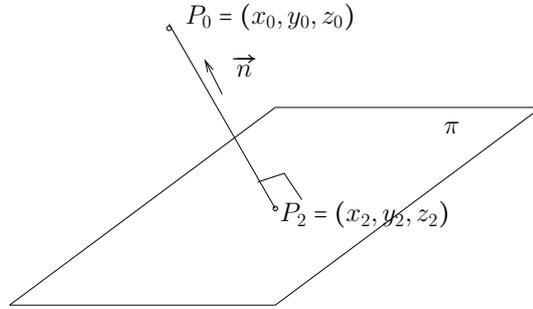


Figura 5: A distância de um ponto a um plano.

2 Solução (Geométrica, simples e sem multiplicadores de Lagrange):

Se P_2 , pertencente a π , é o pé da perpendicular por P_0 ao plano π temos que $\overrightarrow{P_0P_2}$ é paralelo ao vetor normal a π , $\vec{n}_\pi = \langle a, b, c \rangle \neq \vec{0}$. Logo, existe λ em \mathbb{R} tal que $\overrightarrow{P_0P_2} = \lambda \langle a, b, c \rangle$ e portanto a distância de P_0 a π é $|\overrightarrow{P_0P_2}|$. Porém, da identidade

$$P_2 = P_0 + \overrightarrow{P_0P_2} = P_0 + \lambda \langle a, b, c \rangle ,$$

segue que

$$0 = a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c(z_0 + \lambda c) + d = 0 ,$$

e assim, $\lambda(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$ e $\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$. Donde,

$$|\overrightarrow{P_0P_2}| = |\lambda| |\langle a, b, c \rangle| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \blacksquare$$

Recordemos que: se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores em \mathbb{R}^3 tais que $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ e \vec{w} é ortogonal a $\vec{u} \times \vec{v}$ então \vec{w} é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .

Teorema 3. Consideremos três funções f , g e h em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, com Ω um aberto em \mathbb{R}^3 , e a intersecção de duas superfícies de nível zero

$$L = \{P = (x, y, z) \text{ em } \Omega : g(P) = 0 \text{ e } h(P) = 0\} .$$

Suponhamos que $\vec{\nabla} g(x, y, z) \times \vec{\nabla} h(x, y, z) \neq \vec{0}$, para todo (x, y, z) em L . Suponhamos que $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é um extremante local de f sobre L . Então, existem λ_1 em \mathbb{R} e λ_2 em \mathbb{R} tais que

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \lambda_1 \vec{\nabla} g(P_0) + \lambda_2 \vec{\nabla} h(P_0) .$$

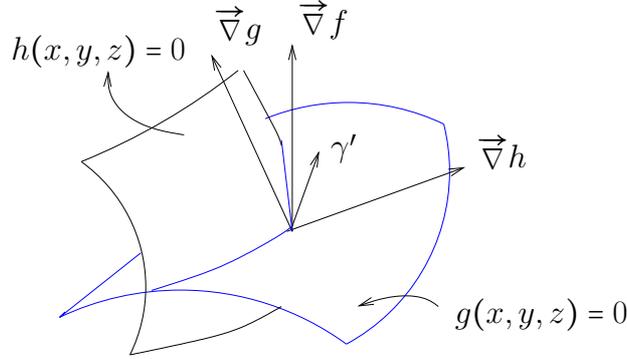


Figura 6: Ilustração ao Teorema 3.

Prova.

Pelas hipóteses (vide o Teorema 3 das Funções Implícitas) temos que localmente, em P_0 , L é uma curva $\gamma = \gamma(t)$, com $\gamma(0) = P_0$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$. Como $\text{Im}(\gamma)$ está contida na superfície de nível zero de g , segue que o vetor $\vec{\nabla}g(P_0)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$ e, analogamente, o vetor $\vec{\nabla}h(P_0)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$ (vide Figura 5). Portanto, $\gamma'(0)$ é paralelo a $\vec{\nabla}g(P_0) \times \vec{\nabla}h(P_0)$.

Ainda, a função $(f \circ \gamma)(t)$ tem máximo, ou mínimo, local em $t = 0$ e $\vec{\nabla}f(P_0) \perp \gamma'(0) \neq \vec{0}$. Assim, temos $\vec{\nabla}f(P_0) \perp \vec{\nabla}g(P_0) \times \vec{\nabla}h(P_0)$. Donde segue que o vetor $\vec{\nabla}f(P_0)$ é combinação linear de $\vec{\nabla}g(P_0)$ e $\vec{\nabla}h(P_0)$ ■

Observação 7. Uma vez mais é elementar eliminar os parâmetros λ_1 e λ_2 (sendo a conveniência circunstancial). De fato, no Teorema 3 temos a identidade $\vec{\nabla}f(P_0) = \lambda_1 \vec{\nabla}g(P_0) + \lambda_2 \vec{\nabla}h(P_0)$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} (P_0) = 0.$$

Observação 8. Os sistemas encontrados nos teoremas acima são redutíveis a uma única equação vetorial, eliminando equações de restrição e acrescentando variáveis. Para o Teorema 3, e analogamente para os demais, definiremos a função \mathcal{L} em cinco variáveis livres (vide Exemplo 6, a seguir), ou não condicionadas,

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z).$$

As soluções do sistema mencionado são os pontos de máximo ou mínimo não-condicionados de \mathcal{L} , os quais se encontram entre seus (de \mathcal{L}) pontos críticos e satisfazem,

$$\vec{\nabla} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = \langle f_x - \lambda g_x - \mu h_x, f_y - \lambda g_y - \mu h_y, f_z - \lambda g_z - \mu h_z, -g, -h \rangle = \vec{0},$$

que é um problema sem condições de restrição e simétrico no sentido que as variáveis tem igual importância. Esta formatação do problema é elegante e trivialmente generalizável para uma função f com qualquer número de variáveis e com qualquer número de restrições.

Definição. A variável λ (ou μ) é um multiplicador de Lagrange.

Em Economia, Geometria Diferencial, Cálculo das Variações, etc. o multiplicador λ é convenientemente interpretado e tem importância por si só.

Exemplo 5. Determine os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

Solução.

Determinemos os pontos que maximizam a função $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância de (x, y, z) a $(0, 0, 0)$ com as restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, com $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$. Tais pontos pertencem à intersecção do elipsóide $g = 0$ com o plano $h = 0$, a qual é um compacto K de \mathbb{R}^3 . Como D é contínua, D assume máximo e mínimo em K . Pela Observação 7 ao Teorema 3, se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é extremante local de D sobre $K = \{(x, y, z) : g = 0 \text{ e } h = 0\}$ temos

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x_0 & 8y_0 & 2z_0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_0 & 4y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, $0 = x_0(z_0 - 4y_0) - y_0(z_0 - x_0) + z_0(4y_0 - x_0) = 3y_0(z_0 - x_0)$ e temos $y_0 = 0$ ou $z_0 = x_0$. Se $y_0 = 0$ obtemos

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

$$x^2 + (1 - x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Assim, $P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ são candidatos a extremantes. Se $z_0 = x_0$ temos,

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2(1 - 2x)^2 = 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9} .$$

Neste caso os candidatos são $P_3 = (0, 1, 0)$ e $P_4 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Comparando os valores $D(P_1) = D(P_2) = 4$, $D(P_3) = 1$ e $D(P_4) = \frac{177}{81}$ constatamos que P_1 e P_2 são os pontos desejados ■

Exemplo 6. Determine o ponto sobre a reta de intersecção dos planos $x + 2y + z = 1$ e $-3x - y + 2z = 4$ que está mais próximo à origem.

Solução.

Minimizemos $x^2 + y^2 + z^2$ com as restrições $x + 2y + z - 1 = 0$ e $-3x - y + 2z - 4 = 0$. Definindo

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + z - 1) - \mu(-3x - y + 2z - 4),$$

resolvamos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda + 3\mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 2\lambda + \mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2z - \lambda - 2\mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x + 2y + z - 1) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = (3x + y - 2z + 4) = 0. \end{cases}$$

Das três primeiras equações temos,

$$x = \frac{\lambda - 3\mu}{2}, \quad y = \frac{2\lambda - \mu}{2}, \quad z = \frac{\lambda + 2\mu}{2},$$

que substituídas na quarta e na quinta equações e então simplificando fornecem

$$\begin{cases} 6\lambda - 3\mu = 2 \\ 3\lambda - 14\mu = -8 \end{cases},$$

e $\lambda = \frac{52}{75}$ e $\mu = \frac{54}{75}$. Donde concluímos, $x = -\frac{11}{15}$, $y = \frac{5}{15}$ e $z = \frac{16}{15}$ ■

No espaço \mathbb{R}^n , chamamos um subespaço vetorial de dimensão $n-1$ de hiperplano (se $n=3$, um hiperplano é um plano passando pela origem).

Exemplo 7. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e tal que a restrição de f a um hiperplano π tem um máximo em um ponto P no hiperplano. Verifique que dado um vetor arbitrário \vec{v} unitário e paralelo a π então temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{v} = 0.$$

Isto é, $\nabla f(P)$ é ortogonal a π . Supondo \vec{n} o vetor normal ao hiperplano π conclua que existe λ em \mathbb{R} tal que

$$\nabla f(P) = \lambda \vec{n}.$$

Seja Ω um aberto em \mathbb{R}^n , n fixo em \mathbb{N} . Como consequência do Teorema da Função Implícita para uma função g em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, mostremos que vale um resultado análogo aos teoremas 1 e 3, no espaço n -dimensional.

Teorema 4. *Sejam f e g , ambas em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, e $S = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$, a superfície de nível zero de g , com $\vec{\nabla} g(x) \neq \vec{0}$ para todo x em S . Seja P , em S , um extremante local de f restrita a S . Então, existe λ em \mathbb{R} tal que*

$$\vec{\nabla} f(P) = \lambda \vec{\nabla} g(P).$$

Interpretação. A superfície solução S da equação $g(x) = 0$ possui hiperplano tangente π e para toda curva γ em S , $\gamma(0) = P$, a composta $f \circ \gamma$ tem um extremante em P . Onde, $\nabla f(P)$ é ortogonal ao vetor tangente $\gamma'(0)$ em π . Assim, $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ são ortogonais a π . A conclusão é então trivial.

Prova.

Indiquemos por $x = (x', x_n)$, com $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ em \mathbb{R}^{n-1} e x_n em \mathbb{R} , a variável em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Analogamente, $P = (p_1, \dots, p_n) = (p', p_n)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $\frac{\partial g}{\partial x_n}(P) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita concluímos que S é, localmente no ponto P , o gráfico de uma função $\varphi(x')$ de classe C^1 .

Descrevamos S , localmente em P , como $S = \{(x', \varphi(x')) : x' \text{ pertence a } A\}$, onde A é um aberto em \mathbb{R}^{n-1} , com p' em A e $(p', \varphi(p')) = P$. É então válida a identidade

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0, \text{ para todo } (x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ em } A.$$

Assim, pela regra da cadeia e omitindo os pontos de aplicação x' e $(x', \varphi(x'))$,

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]_{n \times (n-1)} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \end{array} \right]_{n \times (n-1)} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array} \right],$$

onde a matriz nula indicada é de tamanho $1 \times (n-1)$. É claro que as $n-1$ colunas da matriz $n \times (n-1)$ acima são linearmente independentes em todo ponto x' em A . É fácil constatar que o vetor ∇g é, localmente em S , ortogonal aos vetores correspondentes às $n-1$ colunas citadas.

Por hipótese, a função $f(x', \varphi(x'))$ tem um extremante em $p' = (p_1, \dots, p_{n-1})$. Logo, suas derivadas parciais se anulam em p' . Sabidamente, tais derivadas parciais correspondem às colunas da matriz jacobiana de $f(x', \varphi(x'))$, cuja expressão é análoga a da matriz jacobiana da função $g(x', \varphi(x'))$ dada acima, bastando trocar g por f .

Assim, a função f satisfaz a mesma equação matricial que g , no ponto $(p', \varphi(p')) = P$. Portanto, $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ são ortogonais a um mesmo conjunto de $n-1$ vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n . Logo, os vetores $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P) \neq \vec{0}$ são paralelos. Donde, concluímos a tese ■

Para demonstrarmos o próximo teorema, necessitamos do lema abaixo cuja prova é agradavelmente simples ainda que não concisa.

Lema 5. *Seja M uma matriz em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, com $m \leq n$, tal que suas m linhas são linearmente independentes. Então, existem m colunas de M tais que o determinante da matriz $m \times m$ formado por tais colunas é não zero.*

Prova. Escrevamos

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A primeira linha de M_1 é não nula e assim, existe uma j -ésima coluna com primeiro elemento $a_{1j} = \lambda_{1j} \neq 0$. Então, multiplicando a primeira linha por um número conveniente e somando-a à segunda linha obtemos uma nova matriz cuja segunda linha apresenta o número 0 na j -ésima coluna. As m linhas desta nova matriz são também linearmente independentes e todos os seus menores (determinantes) de ordem m são iguais aos correspondentes menores (determinantes) originais. Iterando tal procedimento, multiplicamos a primeira linha por sucessivos números convenientes e a somamos ordenadamente às demais linhas e obtemos uma matriz M_2 satisfazendo as condições: o primeiro elemento na j -ésima coluna é $\lambda_{1j} = a_{1j} \neq 0$, os demais elementos na j -ésima coluna são nulos, suas linhas são linearmente independentes e todos os seus menores de ordem m são iguais aos respectivos menores originais da matriz M_1 .

Escrevamos,

$$M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

A seguir, notemos que a segunda linha de M_2 é não nula e assim, existe uma k -ésima coluna de M_2 , onde $k \neq j$, com um elemento $b_{2k} = \lambda_{2k} \neq 0$. Então, argumentando analogamente ao parágrafo anterior, encontramos a próxima matriz M_3 (v. abaixo) satisfazendo: o segundo elemento em sua k -ésima coluna é $\lambda_{2k} = b_{2k} \neq 0$, os demais elementos na k -ésima coluna são nulos (a operação de multiplicar a segunda linha de M_2 por uma constante e então adicioná-la à primeira linha não altera o elemento λ_{1j} presente na j -ésima

coluna da primeira linha de M_2), a j -ésima coluna da matriz M_3 é igual a j -ésima coluna da matriz M_2 , suas linhas são linearmente independentes e, ainda, todos os seus menores (determinantes) de ordem m são iguais aos respectivos menores de M_2 . Escrevamos,

$$M_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{2k} & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Então, iterando tal processo encontramos as m colunas desejadas ■

Aproveitando a ocasião, vale a pena notar que o Lema 5 implica trivialmente o **Teorema do Posto**: Se M é uma matriz em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ então, o número p de linhas linearmente independentes de M é igual ao número de colunas linearmente independentes e existe um menor (determinante) de M , de ordem p e não nulo. Ainda, o Teorema do Posto implica o **Teorema do Núcleo e da Imagem**. Vide demonstrações no Apêndice 1.

Teorema 6. *Sejam f em $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e $g = (g_1, \dots, g_m)$ em $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, com $m < n$. Suponhamos que f tem um extremante local no ponto P em $S = g^{-1}(0, \dots, 0)$. Suponhamos também que o conjunto $\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^n em todo ponto. Então, existem m números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tais que*

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(P).$$

Interpretação. Consideremos, para cada $j = 1, \dots, m$, o hiperplano em \mathbb{R}^n tangente à superfície $g_j^{-1}(0)$ no ponto P . A intersecção destes hiperplanos é o espaço vetorial V tangente a S e de dimensão $n - m$. O espaço vetorial V^\perp ortogonal a V , tem dimensão m . O conjunto $\{\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)\}$ é ortogonal a V e portanto uma base de V^\perp . Ainda, dada uma curva arbitrária γ em S , com $\gamma(0) = P$, temos que a função $f \circ \gamma$ tem um extremante em $t = 0$ e assim, $\nabla f(P)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$. Logo, o vetor $\nabla f(P)$ é ortogonal a V e uma combinação linear de $\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)$.

Prova.

Escrevamos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, com $k = n - m$. Indiquemos um ponto em $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ por (x, y) , com $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Analogamente, escrevemos $P = (x_0, y_0)$ com $x_0 \in \mathbb{R}^k$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Pelo Lema 5 acima podemos supor que a matriz formada pelos gradientes das funções g_j 's tem a forma

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} & \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{array} \right]_{m \times n}$$

na qual a matriz $\left[\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(x, y) \right]$ é inversível. Então, pelo Teorema da Função Implícita, em uma vizinhança de P a superfície S é o gráfico de uma função $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , onde A é um aberto contendo x_0 . Então temos,

$$g(x, \varphi(x)) = 0, \text{ para todo } x \text{ em } A.$$

Aplicando a regra da cadeia obtemos então a equação matricial

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} & \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{array} \right] = [0]_{m \times k}.$$

Fixemos um ponto $(x, \varphi(x))$ no gráfico de φ . Consideremos V o sub-espço vetorial de \mathbb{R}^n gerado pelas k colunas linearmente independentes da matriz $(k + m) \times k$ na equação matricial acima e V^\perp o sub-espço vetorial de \mathbb{R}^n que é ortogonal a V . Sabidamente, a dimensão de V^\perp é $n - k = m$. Pela

citada equação matricial vemos que o conjunto linearmente independente $\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\}$ está contido em V^\perp e é, portanto, uma base de V^\perp .

Por hipótese, a função $f(x, \varphi(x))$ tem um extremante em x_0 . Logo, suas derivadas parciais se anulam em x_0 . Sabidamente, tais derivadas parciais correspondem às colunas da matriz jacobiana de $f(x, \varphi(x))$ no ponto x_0 ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & 1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{1 \times k}.$$

Segue então que o vetor $\nabla f(P)$ é ortogonal a V . Portanto, $\nabla f(P)$ é uma combinação linear dos vetores da base $\mathcal{C} = \{\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)\}$ de V^\perp ■.

**Máximos e mínimos, locais e absolutos,
de uma função f em $C^1(K; \mathbb{R})$, K um compacto.**

Definições topológicas. Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^n .

O ponto P de A , é um **ponto interior** de A se existe uma bola aberta, não vazia, centrada em P e contida em A . Isto é, se existe $r > 0$ tal que $B(P; r)$ está contida em A .

O ponto P de \mathbb{R}^n é um **ponto de fronteira** de A se toda bola aberta, não vazia, centrada em P intersecta A e também $\mathbb{R}^n \setminus A = A^C$, o complementar de A . Isto é, se para todo $r > 0$, temos

$$B(P; r) \cap A \neq \emptyset \text{ e também } B(P; r) \cap A^C \neq \emptyset.$$

O interior de A , $\text{int}(A)$, é o conjunto dos pontos interiores de A .

A fronteira de A , ∂A , é o conjunto dos pontos de fronteira de A .

Dado P em A , temos uma só das possibilidades: ou $P \in \text{int}(A)$, ou $P \in \partial A$.

Notemos que:

- (A) Pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo, absolutos.
- (B) Os pontos de máximo e mínimo locais e interiores a K são pontos críticos de f . Isto é, em tais pontos o gradiente se anula. Assim, adotamos o procedimento abaixo.
 - (1) Restringindo f a $\text{int}(K)$ determinamos os pontos críticos, candidatos a extremantes.
 - (2) Encontramos os possíveis pontos de máximo e mínimo de f sobre a fronteira, ∂K , ou elementarmente ou por multiplicadores de Lagrange.
 - (3) O máximo e o mínimo absolutos estão entre os valores de f nos pontos acima obtidos.

Exemplo 8. Dada $f(x, y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes e os máximos e mínimos locais e absolutos de f no quadrado

$$K = \{(x, y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}.$$

Solução. Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\vec{\nabla} f = \langle 12x + 18y - 6, 18x + 8y - 10 \rangle = \langle 0, 0 \rangle \Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad 9x + 4y - 5 = 0$$

Logo, o único ponto crítico no interior de K é $P_0 = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right)$. A matriz hessiana de f é,

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e então, $f_{xx}(P_0) = 12 > 0$ e o determinante hessiano $H_f(P_0)$ é negativo. Logo, P_0 é ponto de sela e f não tem máximo ou mínimo local em $\text{int}(D)$.

Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K ,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1, 1] \cup \{1\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{-1\} \cup [-1, 1] \times \{1\}.$$

Na figura abaixo as setas indicam a direção do vetor ortogonal a ∂K .

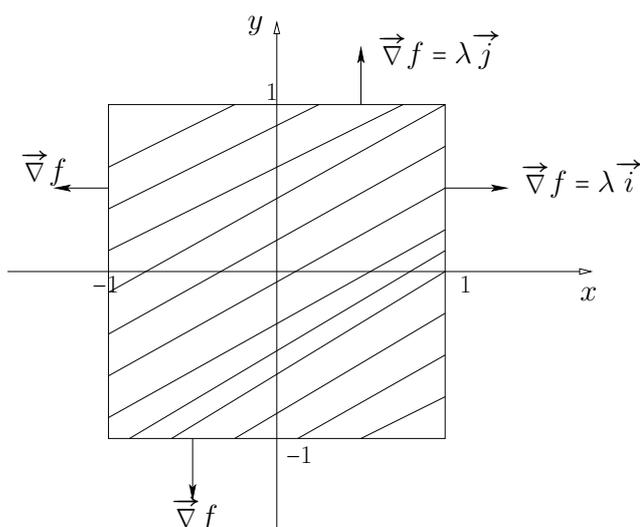


Figura 7: Ilustração ao Exemplo 7

Os extremantes locais na fronteira de K , mas não um vértice, satisfazem (v. Teorema 2):

Em $\{-1\} \times]-1, 1[$ temos $x = -1$ e $0 = f_y = -18 + 8y - 10$; logo, $y = 7/2$, possibilidade que descartamos.

Em $\{1\} \times]-1, 1[$ temos $x = 1$ e $0 = f_y = 18 + 8y - 10$; logo, $y = -1$ e $P_1 = (1, -1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analisado à parte.

Em $] -1, 1[\times \{-1\}$ temos $y = -1$ e $0 = f_x = 12x - 18 - 6$; logo, $x = 2$, que também descartamos.

Em $] -1, 1[\times \{1\}$ temos $y = 1$ e $0 = f_x = 12x + 18 - 6$; logo, $x = -1$ e $P_2 = (-1, 1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analisado à parte.

Finalmente, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre os vértices. Temos, $f(1, 1) = 17$, $f(-1, -1) = 49$, $f(1, -1) = +1$, e $f(-1, +1) = -7$.

Resposta: Não existem máximo ou mínimo locais e interiores. Ainda, $f(-1, +1) = -7$ é o mínimo absoluto e $f(-1, -1) = 49$ é o máximo absoluto ■

Exemplo 9. Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$

sobre o compacto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq 1\}$.

Solução. Pelo Teorema de Weierstrass a função f admite pontos de máximo e mínimo absolutos em M . Se tais pontos estiverem no interior de M então eles são pontos críticos. Os pontos críticos de f satisfazem

$$\vec{\nabla} f = \langle 2x + 1, 2y + 1, 2z \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

e portanto o único ponto crítico $(-1/2, -1/2, 0)$ não pertence ao interior de M e assim os extremantes de f pertencem à fronteira de M , ∂M . Então, um extremante P_0 arbitrário pertence a

$$M_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z > 1\} \quad \text{ou} \quad M_2 = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 < 3\} \quad \text{ou}$$

$$M_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z = 1\}.$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ estiver em M_1 , por Multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla} f = \langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1, 2z_0 \rangle = \lambda \langle 2x_0, 2y_0, 2z_0 \rangle$$

e portanto $2z_0 = \lambda 2z_0$ e então : ou temos $\lambda = 1$ ou temos $z_0 = 0$. Se $z_0 = 0$, então P_0 não pertence a M_1 e descartamos tal possibilidade. Se $\lambda = 1$ então temos $2x_0 + 1 = 2x_0$, uma contradição!

Se P_0 pertence a M_2 (onde temos $z_0 = 1$) então segue

$$\langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1, 2z_0 \rangle = \lambda \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Logo, encontramos o candidato $P_1 = (-1/2, -1/2, 1)$.

Se P_0 pertence a M_3 então P_0 é extremante condicionado de

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + x + y + z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1. \end{cases}$$

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange obtemos

$$\nabla f(P_0) = \lambda_1 \langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1, 2z_0 \rangle + \lambda_2 \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 2x_0 + 1 & 2y_0 + 1 & 2 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donde segue $2y_0(2x_0 + 1) - 2x_0(2y_0 + 1) = 0$ e $y_0 = x_0$. Substituindo na equação da esfera segue $2x_0^2 = 3$ e $x_0 = \pm\sqrt{6}/2$. Desta forma, encontramos os candidatos $P_2 = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$ e $P_3 = (-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$.

Como $f(P_1) = \frac{1}{2}$, $f(P_2) = 4 + \sqrt{6}$ e $f(P_3) = 4 - \sqrt{6}$, concluimos que P_1 é ponto de mínimo absoluto e P_2 é ponto de máximo absoluto ■

Exemplo 10 (Um Argumento Importante).

Argumento: Seja $S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$ a superfície de nível 0 de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω um aberto de \mathbb{R}^3 , com f de classe C^1 e

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) \neq \vec{0}, \text{ para todo } (x, y, z) \text{ em } S.$$

Seja $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ em \mathbb{R}^3 tal que P_1 não pertence a S . Suponhamos que P_0 é o ponto em S que realiza a distância do ponto P_1 à superfície S [isto é, vale a desigualdade $|P_1 - P_0| \leq |P_1 - P|$, para todo P em S]. Então temos,

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donde segue, $\overrightarrow{P_0 P_1} \perp S$. Consequentemente obtemos: $\overrightarrow{P_0 P_1} \perp \gamma'(t_0)$, se γ é uma curva arbitrária de classe C^1 , em S , tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

Prova. Seja $D(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ definida em \mathbb{R}^3 . Considerando um disco fechado $\overline{D}(P_1; R)$ centrado em P_1 e com raio $R > 0$ suficientemente grande tal que $K = \overline{D}(P_1; R) \cap S \neq \emptyset$, temos que K é compacto (pois fechado e limitado). Pelo Teorema de Weierstrass a função D restrita a K assume um valor mínimo em algum ponto $P \in S$. É claro que P é o ponto P_0 procurado, que realiza a distância de P_1 à superfície S . Então, como D restrita a S assume valor mínimo em $P_0 \in S$, pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange é válida a equação:

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = \lambda \vec{\nabla} f(P_0), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Computemos o gradiente de $D(x, y, z)$. É fácil ver que

$$\vec{\nabla}(D) = \langle 2(x - x_1), 2(y - y_1), 2(z - z_1) \rangle,$$

e portanto,

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = 2 \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1 \rangle = -2 \overrightarrow{P_0 P_1},$$

e assim temos (notemos, abaixo, que a constante -2 é absorvível por λ)

$$-2 \overrightarrow{P_0 P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \quad \blacksquare$$

Uma Aplicação de Multiplicadores de Lagrange

Notações. Identifiquemos vetores em \mathbb{R}^n com matrizes-colunas em $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$:

$$X = (x_1, \dots, x_n) \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A aplicação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ determinada por A em $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é

$$T(X) = AX, \quad X \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Seja A em $M_n(\mathbb{R})$. Então, um real λ é auto-valor de A se existe \vec{v} tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Seja A em $M_n(\mathbb{R})$ e simétrica. A forma quadrática associada a A é a aplicação

$$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(X) = X^t AX = AX \cdot X.$$

Lema. Se Q é a forma quadrática associada à matriz simétrica A então

$$\vec{\nabla} Q(X) = 2AX.$$

Prova.

Se $A = [a_{ij}]$ então $AX = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)$ e então, como $a_{ij} = a_{ji}$,

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2.$$

Logo,

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = 2 \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j + 2a_{kk}x_k = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \implies \vec{\nabla} Q(X) = 2AX \quad \blacksquare$$

Corolário. *Sejam M , o máximo, e m , o mínimo, da forma quadrática Q associada à matriz simétrica A sobre a esfera unitária $\{X \text{ em } \mathbb{R}^n : |X| = 1\}$.*

- (a) *Os números M e m são, respectivamente, o maior e o menor auto-valores (reais) de A .*
- (b) *$m|X|^2 \leq Q(X) \leq M|X|^2$, para todo X em \mathbb{R}^n .*
- (c) *Q é definida positiva se e somente se todos os auto-valores de A são estritamente positivos.*
- (d) *Q é definida negativa se e somente se todos os auto-valores de A são estritamente negativos.*

Prova.¹

- (a) Por ser contínua, a forma quadrática Q assume valor máximo e valor mínimo sobre a esfera compacta $S^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n : |X| = 1\}$.

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, concluímos que para cada ponto de máximo e de mínimo X na esfera unitária $S^{n-1} = g^{-1}(0)$, com $g(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$, existe algum λ em \mathbb{R} tal que

$$\vec{\nabla} Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda \vec{\nabla} g(x_1, \dots, x_n),$$

e então, para tais pontos e pelo lema acima temos

$$2AX = \lambda 2X \quad \Rightarrow \quad AX = \lambda X,$$

e assim, se X_M , onde $|X_M| = 1$, é tal que $Q(X_M) = M$ e λ_M é um número real tal que $AX_M = \lambda_M X_M$, temos

$$M = Q(X_M) = AX_M \cdot X_M = \lambda_M |X_M|^2 = \lambda_M,$$

e analogamente temos as identidades

$$AX_m = \lambda_m X_m, \quad |X_m| = 1 \quad \text{e} \quad m = Q(X_m) = AX_m \cdot X_m = \lambda_m.$$

¹É provado em Álgebra Linear que toda matriz A simétrica e real de ordem n tem n auto-valores reais: as raízes, com suas multiplicidades, do polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, I a matriz identidade de $M_n(\mathbb{R})$. Mas, não utilizaremos tal fato.

Ainda mais , se λ é um auto-valor real de A então é claro que existe um vetor \vec{v} , com $|\vec{v}| = 1$, tal que $A(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Logo, $m \leq Q(\vec{v}) \leq M$ e, ainda, $Q(\vec{v}) = (A\vec{v}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \cdot \vec{v} = \lambda |\vec{v}|^2 = \lambda$. Donde finalmente seguem as desigualdades

$$m \leq \lambda \leq M.$$

(b) Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ então,

$$m \leq Q\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) \leq M \implies m \leq A\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \leq M \implies m \leq \frac{Q(\vec{v})}{|\vec{v}|^2} \leq M .$$

(c) e (d) Seguem trivialmente de (b) ■

Apêndice - Teorema do Posto e Teorema do Núcleo e da Imagem.

Primeira Parte: Lema 5 implica os Teoremas do Posto e o do Núcleo e da Imagem

Teorema do Posto. *Seja M em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Seja p (o posto de M) o número máximo de linhas linearmente independentes de M . Então,*

- (a) *O número máximo de colunas linearmente independentes de M é p .*
- (b) *O máximo entre as ordens dos menores não nulos de M é p .*

Prova. É claro que $p \leq m$. Como as linhas de M são vetores em \mathbb{R}^n e em \mathbb{R}^n há no máximo n vetores linearmente independentes, segue que $p \leq n$. Os casos M em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e M^t em $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ são análogos. Logo, basta mostrarmos que M tem p colunas linearmente independentes e um menor (determinante) de ordem p que não é nulo.

- (a), (b) Consideremos \overline{M} em $M_{p \times n}(\mathbb{R})$ dada por um conjunto de p linhas linearmente independentes de M , ordenadas (naturalmente) segundo a ordem herdada de M . Os menores de \overline{M} são menores de M . Pelo Lema 5, \overline{M} apresenta um menor de ordem p não nulo.

Portanto, a matriz M tem um menor de ordem p não nulo. Por uma propriedade de determinantes, as p colunas deste menor de ordem p são linearmente independentes. É fácil ver que as p colunas de M correspondentes às p colunas deste menor são linearmente independentes. Pela propriedade de determinantes citada acima temos que M não tem um menor de ordem superior a p e não nulo ■

Abaixo, identificamos \mathbb{R}^n com $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ e \mathbb{R}^m com $M_{m \times 1}(\mathbb{R})$.

Teorema do Núcleo e da Imagem. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $TX = MX$, onde M é uma matriz em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e X está em \mathbb{R}^n . Então,*

$$\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) = n.$$

Prova. Sabidamente, a imagem de T é gerada pelas colunas de M . É fácil ver que o subespaço $\text{ker}(T)$ é ortogonal ao sub-espaço de \mathbb{R}^n gerado pelas

linhas de M . Se p é o posto de M , pelo Teorema do Posto temos

$$\begin{cases} \dim \text{Im}(T) = p \\ \dim \text{Ker}(T) = n - p \quad \blacksquare \end{cases}$$

Segunda Parte: Teorema do Núcleo e da Imagem implica Teorema do Posto.

Mantida a notação da primeira parte consideramos as aplicações lineares

$$\begin{cases} T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ por } T(X) = MX, \text{ onde } M \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \\ T^t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ por } T^t Y = M^t Y \text{ onde } M^t \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \text{ é a transposta de } M. \end{cases}$$

Notemos que $Y \in \text{Ker}(T^t)$ se e somente se $M^t Y = 0$. Isto é, $Y \in \text{Ker}(T^t)$ se e somente se Y é ortogonal às linhas de M^t (i.e., colunas de M). Logo,

$$\ker(T^t) = [\text{Im}(T)]^\perp.$$

Porém, pelo teorema do núcleo e da imagem temos

$$\dim \text{Im}(T^t) = m - \dim \ker(T^t).$$

Concluimos então que

$$\dim \text{Im}(T^t) = m - [m - \dim \text{Im}(T)] = \dim \text{Im}(T).$$

Logo, o número de **colunas** linearmente independentes de M é igual ao número de **linhas** linearmente independentes de M ■

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 1 e 2, 5 ed., Ed. LTC, 2002.
3. Lima, E., *Curso de Análise*, Vol 2., IMPA, 2009.
4. Mackiw, G. *A Note on the Equality of the Column and Row Rank of a Matrix*, Mathematics Magazine, Vol. 68, No. 4 (Oct., 1995), pp. 285-286.
5. Simmons, G. F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 2, McGraw-Hill, 1988.
6. Wardlaw, W. P., *Row Rank Equals Column Rank*, Mathematics Magazine, Vol. 78, No. 4 (Oct. 2005), pp. 316-318.