**MAT 211 - Cálculo III - IMEUSP**
**1º semestre de 2012**
*Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira*

## 4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x,y)=1$ , para todo $(x,y)\in R=[a,b]\times[c,d]$. Prove que

$$\iint_R f(x,y)dxdy=(b-a)(d-c).$$

2. Seja $f:R=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 \text{ se } (x,y)\in(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cap R \\ \\ 0 \text{ se } (x,y)\notin(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cap R. \end{cases}.$$

Determine se $f$ é integrável ou não. Se $f$ é integrável, compute sua integral.

3. Prove, a partir da definição de integral dupla e da teoria da integração em $\mathbb{R}$,

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} xdxdy=\frac{(b^2-a^2)}{2}(d-c)=(d-c)\int_a^b xdx.$$

4. Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ contínuas e positivas. Prove, a partir da definição de integral dupla e da teoria da integração em $\mathbb{R}$, que $fg$ é integrável e

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy=\Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_c^d g(y)dy\Big).$$

5. Sejam $f:X\to\mathbb{R}$ e $g:X\to\mathbb{R}$ limitadas, com $X$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\inf_X f+\inf_X g\le\inf_X(f+g) \quad \text{e} \quad \sup_X(f+g)\le\sup_X f+\sup_X g.$$

6. Seja $X$ um conjunto (universo), $I$ um conjunto de índices e $\{A_i : i\in I\}$ uma família de subconjuntos de $X$. O complementar de um subconjunto $A$ de $X$ é $A^c=X\setminus A$. Mostre as relações:

$$\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c \quad \text{e} \quad \Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c.$$

7. Seja $R = [a,b] \times [c,d]$. Para $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ temos as definições abaixo.

   - O complementar de $A$: $A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$.
   - O interior de $A$: $\text{int}(A) = \{a \in A : \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(0;r) \subset A\}$.
   - O fecho de $A$: $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ B(x;r) \cap A \neq \varnothing\,, \forall r > 0\}$.
   - A fronteira de $A$: $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : B(x;r) \cap A \neq \varnothing \text{ e } B(x;r) \cap A^c \neq \varnothing\,, \forall r > 0\}$.

   Com o símbolo $\uplus$ indicando uma reunião disjunta de conjuntos, mostre

   (i) $R = \text{int}(A) \uplus \partial A \uplus (R \setminus \overline{A})$

   (ii) $1 = \chi_{\text{int}(A)} + \chi_{\partial(A)} + \chi_{R \setminus \overline{A}}$.

8. Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Mostre que

   (i) O conjunto $A \setminus \text{int}(A)$ está contido na fronteira de $A$.

   (ii) A fronteira do interior de $A$ está contida na fronteira de $A$.

   (iii) $\chi_A = \chi_{\text{int}(A)} + \chi_{A \setminus \text{int}(A)}$.

   **Sugestão:** Faça um desenho ilustrativo.

9. Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Mostre que

   (i) A fronteira de $\overline{A}$ está contida na fronteira de $A$.

   (ii) A fronteira de $\overline{A} \setminus A$ está contida na fronteira de $A$.

   (iii) $\chi_{\overline{A}} = \chi_A + \chi_{\overline{A} \setminus A}$.

   **Sugestão:** Faça um desenho ilustrativo.

10. Seja $f : K \to \mathbb{R}^2$ contínua, com $K$ compacto em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $f(K)$ é compacto.

    **Sugestão:** Utilize a seguinte caracterização de compacidade: "$K$ é compacto se e somente se toda sequência em $K$ admite uma subsequência convergente a um ponto de $K$". Considere então uma sequência $\big(f(z_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ em $f(K)$ e mostre que ela admite uma subsequência convergente em $f(K)$.

11. Sejam $A$ e $B$ subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, com $A \subset B$. Mostre que se $B$ tem conteúdo nulo então $A$ também tem contéudo nulo.

12. (i) Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, ambos com conteúdo nulo. Mostre que $A \cup B$ tem conteúdo nulo.

    (ii) Mostre que a reunião finita de conjuntos de conteúdo nulo é um conjunto de conteúdo nulo.

13. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ integrável, com $\partial A$ de conteúdo nulo. Mostre as afirmações abaixo.

   (i) A restrição de $f$ ao aberto $\text{int}(A)$, denotada por $f\Big|_{\text{int}(A)} : \text{int}(A) \to \mathbb{R}$, e que abusando da notação indicamos apenas por $f$, é integrável e
   $$\iint_{\text{int}(A)} f dxdy = \iint_A f dxdy.$$

   (ii) Consideremos $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ uma extensão limitada qualquer de $f$ ao compacto $\overline{A}$. Então, $\overline{f}$ é integrável e
   $$\iint_{\overline{A}} \overline{f} dxdy = \iint_A f dxdy.$$

   **Sugestão:** Utilize os exercícios 8, 9 e 11. Talvez também lhe seja útil ou o Corolário 9, ou a Proposição 10 ou o Lema 12 (ou uma combinação deles) nas notas de aulas.

14. Seja $A$ um conjunto de conteúdo nulo. Mostre que $\partial A$ tem conteúdo nulo.

15. Sejam $A$ e $B$ subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, com $A \subset B$. Mostre que se $B$ tem medida nula então $A$ também tem medida nula.

16. (i) Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, ambos com medida nula. Mostre que $A \cup B$ tem medida nula.

   (ii) Mostre que a reunião finita de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula.

17. Seja $F : R = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ integrável e $C \subset R$ tal que $C$ tem conteúdo nulo. Seja $G : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ limitada tal que $G \equiv F$ em $R \setminus C$. Mostre que $G$ é integrável e
   $$\iint_{a,b]\times[c,d]} G dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} F dxdy.$$

   **Sugestão:** Aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

18. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ contínua e $A$ um subconjunto limitado do plano com fronteira de conteúdo nulo. Mostre que $f$ é integrável.

   **Sugestão:** aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

19. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que $|f| : A \to \mathbb{R}$ é integrável e
   $$\left| \iint_A f(x, y) dxdy \right| \le \iint_A |f(x, y)| dxdy.$$

   **Sugestão:** aplique o Teorema de Caracterização para funções integráveis.

20. Estude, e reescreva com sua próprias palavras, a demonstração de que toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$, onde $K$ é um compacto em $\mathbb{R}^2$, é uniformemente contínua.