

2ª Lista de MAT211 - Cálculo III - IMEUSP

1º semestre de 2012

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Atenção: Resolver os oito exercícios ímpares 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15, da seção 12.2, *DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE. TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS* que constam no Capítulo 12 do livro *Um Curso de Cálculo*, Vol 2, 5ª edição, de H. L. Guidorizzi, pp. 226-244.

Resolver também os exercícios abaixo.

9. Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^2 , $g = g(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo ponto de Ω e $F = F(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo ponto de \mathbb{R}^3 . Suponhamos o gráfico de g contido numa superfície de nível de F .

Mostre que se $P_0 \in \text{Gr}(g)$ (o gráfico de g) e $\vec{\nabla} f(P_0) \neq \vec{0}$ então:

$\vec{\nabla} f(P_0)$ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de g no ponto P_0 .

10. A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implicitamente por $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

11. Um campo de forças $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, com P e Q funções definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é dito **conservativo** se existe um campo escalar $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{\nabla}\varphi(x, y) = \vec{F}(x, y) \text{ em } \Omega .$$

Uma tal função φ , quando existe, chama-se **função potencial** associada ao campo \vec{F} . Verifique se são conservativos os campos abaixo (justifique):

$$(a) \vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (b) \vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} \quad (c) \vec{F}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

12. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo de forças com P e Q funções contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \Omega, \forall t \in [a, b]$, uma curva de classe C^1 , com $\gamma(a) = \gamma(b)$ [γ é então dita **curva fechada**]. Mostre que se o campo \vec{F} é conservativo então,

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0 .$$

13. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Verifique

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) .$$

(b) Compute $\int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$, onde $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

(c) \vec{F} é conservativo? Por que?

14. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo de forças com P e Q funções contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se o campo \vec{F} é conservativo, então existe uma função escalar $U(x, y)$ definida em Ω satisfazendo

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \text{ em } \Omega.$$

Denominamos U **função energia potencial** associada ao campo vetorial \vec{F} . Determine, caso exista, a função energia potencial associada ao campo \vec{F} dado e satisfazendo a condição dada.

- (a) $\vec{F}(x, y) = -6x\vec{i} - 2y\vec{j}$ e $U(0, 0) = 0$.
 (b) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} - xy\vec{j}$ e $U(0, 0) = 1000$.
15. a) Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $\begin{cases} z = z(x, y) = e^x \cos y \\ x = x(t, s) = ts \\ y = y(t, s) = \sqrt{t^2 + s^2} \end{cases}$.
 b) Verifique, para o ítem a), a fórmula abaixo (uma Regra da Cadeia).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

16. (Coordenadas polares) Seja $z = f(x, y)$, onde $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$.
- (a) Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.
 (b) Mostre que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.
 (c) Analogamente ao Exercício anterior, escreva para este Exercício a fórmula matricial relacionando as derivadas.