

CÁLCULO III - MAT 211- IMEUSP- 1 Semestre de 2012

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**INTEGRAL DUPLA: TEOREMA DE FUBINI E
TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS**

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> oliveira@ime.usp.br

Definições.

- **Partição.** Sejam $a, b, c,$ e d quatro números reais. Consideremos no plano cartesiano Oxy o retângulo

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}.$$

Consideremos também as partições arbitrárias

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \text{ do intervalo } [a, b], \text{ e} \\ \mathcal{P}_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}, \text{ do intervalo } [c, d]. \end{cases}$$

O conjunto $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \{(x_i, y_j) : 0 \leq i \leq n \text{ e } 0 \leq j \leq m\}$ é dito uma partição do retângulo R . A partição \mathcal{P} divide R em nm sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \text{ com } 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m.$$

A área de R_{ij} é $m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

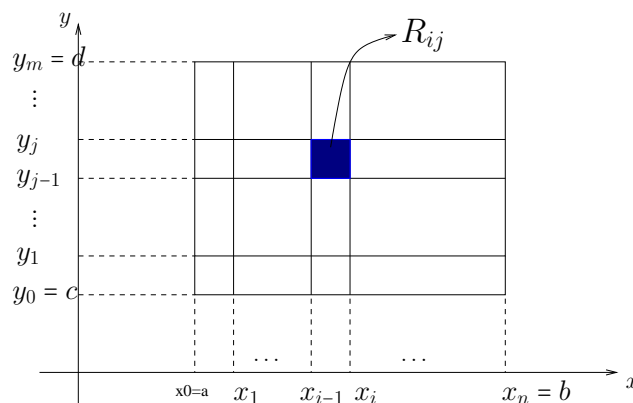


Figura 1: Ilustração à partição \mathcal{P} .

- **Somas de Darboux.** Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada (esta hipótese é importante na definição da integral de Riemann). Para cada sub-retângulo R_{ij} da partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ consideremos

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f = \sup\{f(x) : x \in R_{ij}\} \quad \text{e} \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f = \inf\{f(x) : x \in R_{ij}\}.$$

As somas superior e inferior de f relativa à partição \mathcal{P} são, respectivamente,

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} m(R_{ij}) \quad \text{e} \quad s(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} m(R_{ij}).$$

- **Refinamento de uma Partição.** Dizemos que uma partição \mathcal{P}' do retângulo R é um refinamento de uma partição \mathcal{P} de R se \mathcal{P}' contém \mathcal{P} . Isto é, se \mathcal{P}' é uma partição de R que contém todos os pontos de \mathcal{P} (e possivelmente outros pontos). Assim, cada sub-retângulo da partição \mathcal{P}' está contido em algum sub-retângulo da partição \mathcal{P} . Dizemos que \mathcal{P}' é mais fina que \mathcal{P} .

Observação. Sejam $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \times \mathcal{P}'_2$ partições de R . É fácil ver que se \mathcal{P}' refina \mathcal{P} então a partição \mathcal{P}'_1 refina \mathcal{P}_1 e a partição \mathcal{P}'_2 refina \mathcal{P}_2 . Em geral, a partição $\mathcal{P}'' = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}'_1) \times (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}'_2)$ refina as partições \mathcal{P} e \mathcal{P}' .

Fixemos uma função limitada $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, com R um retângulo fechado e limitado. Mostramos abaixo que ao refinarmos uma partição de R então, a soma inferior cresce e a soma superior decresce. Mostramos também que qualquer soma inferior de f relativa à qualquer partição de R é menor ou igual a qualquer soma superior de f relativa à qualquer partição de R .

Lema 1. *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Sejam \mathcal{P} e \mathcal{P}' duas partições de R .*

(a) *Se \mathcal{P}' é mais fina que \mathcal{P} então*

$$s(f; \mathcal{P}) \leq s(f; \mathcal{P}') \quad \text{e} \quad S(f; \mathcal{P}') \leq S(f; \mathcal{P}).$$

(b) $s(f; \mathcal{P}') \leq S(f; \mathcal{P})$.

Prova.

(a) Indiquemos por R_{ij} os sub-retângulos da partição \mathcal{P} e por R'_{kl} os sub-retângulos de \mathcal{P}' . Fixemos um arbitrário R_{ij} , que se encontra subdividido em uma coleção de sub-retângulos R'_{kl} (vide Figura 2). Fixemos um tal índice kl . Temos,

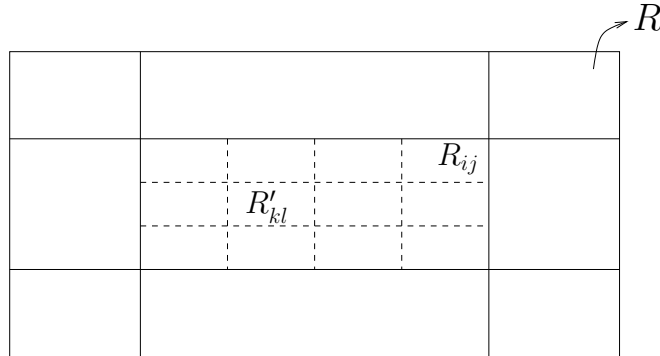


Figura 2: Ilustração ao Lema 1.

$$m_{ij} = \inf f(R_{ij}) \leq m'_{kl} = \inf f(R'_{kl}) \leq M'_{kl} = \sup f(R'_{kl}) \leq \sup f(R_{ij}) = M_{ij}.$$

Logo, $m_{ij}m(R'_{kl}) \leq m'_{kl}m(R'_{kl}) \leq M'_{kl}m(R'_{kl}) \leq M_{ij}m(R'_{kl})$. Donde, efetuando o somatório sobre tais índices kl obtemos as desigualdades

$$m_{ij}m(R_{ij}) \leq \sum m'_{kl}m(R'_{kl}) \leq \sum M'_{kl}m(R'_{kl}) \leq M_{ij}m(R_{ij}).$$

Donde, computando o somatório sobre todos os índices ij obtemos as desigualdades $s(f; \mathcal{P}) \leq s(f; \mathcal{P}') \leq S(f; \mathcal{P}') \leq S(f; \mathcal{P})$.

(b) Seja \mathcal{P}'' uma partição que refina \mathcal{P} e \mathcal{P}' (vide observação acima). Pelo item (a) temos $s(f; \mathcal{P}') \leq s(f; \mathcal{P}'') \leq S(f; \mathcal{P}'') \leq S(f; \mathcal{P})$ ■

Pelo Lema 1(b) segue que, fixada f , o supremo das somas inferiores é menor ou igual ao ínfimo das somas superiores.

Definição. Seja R um retângulo compacto em \mathbb{R}^2 e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. A integral inferior de f e a integral superior de f são, respectivamente,

$$\iint f(x, y) dx dy = \sup \left\{ s(f; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } R \right\} \text{ e}$$

$$\overline{\iint} f(x, y) dx dy = \inf \left\{ S(f; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } R \right\}.$$

Dizemos que f é integrável (Riemann-integrável) se a integral inferior de f é igual à integral superior de f . A integral de f sobre R é então este valor. Indicamos tal número por,

$$\iint_R f(x, y) dx dy.$$

Teorema 2. *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Então, f é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição \mathcal{P} de R tal que*

$$0 \leq S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \epsilon.$$

Prova.

(\Leftarrow) Segue de $s(f; \mathcal{P}) \leq \sup_{\text{partições}} \{s(f; \mathcal{Q})\} \leq \inf_{\text{partições}} \{S(f; \mathcal{Q})\} \leq S(f; \mathcal{P})$.

(\Rightarrow) Seja $\epsilon > 0$. Pela hipóteses, existem duas partições \mathcal{P} e \mathcal{P}' tais que

$$\begin{cases} \sup\{s(f; \mathcal{Q})\} - \epsilon/2 < s(f; \mathcal{P}) \leq \sup\{s(f; \mathcal{Q})\}, \\ \inf\{S(f; \mathcal{Q})\} \leq S(f; \mathcal{P}') < \inf\{S(f; \mathcal{Q})\} + \epsilon/2, \\ \text{com } \sup\{s(f; \mathcal{Q})\} = \inf\{S(f; \mathcal{Q})\}. \end{cases}$$

Logo, $0 \leq S(f; \mathcal{P}') - s(f; \mathcal{P}) < \epsilon$. Seja \mathcal{P}'' uma partição que refina \mathcal{P} e \mathcal{P}' . Pelo Lema 1 temos $s(f; \mathcal{P}) \leq s(f; \mathcal{P}'') \leq S(f; \mathcal{P}'') \leq S(f; \mathcal{P}')$. Donde concluímos que $0 \leq S(f; \mathcal{P}'') - s(f; \mathcal{P}'') < \epsilon$ ■

PROPRIEDADES DA INTEGRAL

Proposição 3. *Sejam f e g integráveis em R e λ em \mathbb{R} . Então,*

- $f + g$ é integrável e

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_R g(x, y) dx dy.$$

- λf é integrável e

$$\iint_R [\lambda f(x, y)] dx dy = \lambda \iint_R f(x, y) dx dy.$$

- Se $f \geq 0$ então $\iint_R f(x, y) dx dy \geq 0$.
- Se $f \geq g$ então $\iint_R f(x, y) dx dy \geq \iint_R g(x, y) dx dy$.

Prova.

A quarta propriedade segue das três primeiras. A terceira é óbvia. Deixamos a segunda (a qual é trivial) ao leitor. Mostremos a primeira.

Notemos que se S é um sub-retângulo do retângulo R então,

$$(3.1) \quad \inf_S f + \inf_S g \leq \inf_S (f + g) \quad \text{e} \quad \sup_S (f + g) \leq \sup_S f + \sup_S g.$$

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{Q}$ e \mathcal{Q}' quatro partições arbitrárias de R . Seja \mathcal{P}'' uma partição refinando \mathcal{P} e \mathcal{P}' . Seja \mathcal{Q}'' refinando \mathcal{Q} e \mathcal{Q}' . Pelo Lema 1 e por (3.1) temos,

$$\begin{aligned} s(f; \mathcal{P}) + s(g; \mathcal{P}') &\leq s(f; \mathcal{P}'') + s(g; \mathcal{P}'') \leq s(f + g; \mathcal{P}'') \leq \underline{\iint} (f + g) \\ &\leq \overline{\iint} (f + g) \leq S(f + g; \mathcal{Q}'') \leq S(f; \mathcal{Q}'') + S(g; \mathcal{Q}'') \leq S(f; \mathcal{Q}') + S(g; \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Donde segue,

$$s(f; \mathcal{P}) + s(g; \mathcal{P}') \leq \underline{\iint} (f + g) \leq \overline{\iint} (f + g) \leq S(f; \mathcal{Q}') + S(g; \mathcal{Q}).$$

Computando na sequência de desigualdades acima, de forma ordenada e independente, o supremo sobre as partições \mathcal{P} , o supremo sobre as partições \mathcal{P}' , o ínfimo sobre as partições \mathcal{Q} e o ínfimo sobre as partições \mathcal{Q}' obtemos

$$\iint_R f dx dy + \iint_R g dx dy \leq \underline{\iint} (f + g) \leq \overline{\iint} (f + g) \leq \iint_R f dx dy + \iint_R g dx dy.$$

Logo, $f + g$ é integrável e sua integral é a soma das integrais de f e g ■

Para caracterizar as funções Riemann-integráveis é útil rever compacidade e continuidade e definir conjuntos de conteúdo nulo e de medida nula.

COMPACIDADE

Já destacamos anteriormente e reconheceremos ao longo deste livro, a importância dos conjuntos compactos. Todos os interessados em análise tem visto que é impossível seguir sem eles.

(Frechét 1928, *Espaces abstraits*, p. 66)

As definições e os resultados nesta seção admitem óbvios análogos em \mathbb{R}^n .

Definições e Notações.

- Dada uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}^2 , e uma família ordenada de índices naturais distintos $\{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ dizemos que a sequência $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_k}, \dots)$ é uma **subsequência** da sequência (z_n) .
- A sequência de conjuntos $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **crecente** se $X_n \subset X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Analogamente, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **decrecente** se $X_n \supset X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Seja K contido em \mathbb{R}^2 e I um conjunto arbitrário de índices. Dizemos que $\bigcup_{i \in I} O_i$ é uma **cobertura aberta** de K se O_i é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , para todo $i \in I$, e se $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.
- Um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ é um **ponto de acumulação** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ se, para todo $\epsilon > 0$, o disco aberto $D(p; \epsilon)$ contém ao menos um ponto de X distinto de p .

Se p é um ponto de acumulação de X , no disco $D(p; 1)$ existe um ponto x_1 de $X \setminus \{p\}$. Pelo mesmo motivo, no disco $D(p; r_2)$ de raio $r_2 = \min(1/2, |x_1 - p|)$ existe um ponto x_2 de $X \setminus \{p\}$. Iterando tal argumentação, construímos uma sequência (x_n) de pontos de $X \setminus \{p\}$ tal que x_n pertence ao disco $D(p; r_n)$ de raio $r_n = \min(1/n, |x_{n-1} - p|)$. Vemos assim que existe uma sequência (x_n) , de pontos distintos de $X \setminus \{p\}$, convergente a p . Consequentemente, para todo $\epsilon > 0$, o disco $D(p; \epsilon)$ contém infinitos pontos de $X \setminus \{p\}$.

Teorema 4. *Seja K um subconjunto de \mathbb{R}^2 . São equivalentes:*

- (a) *Toda cobertura de K por conjuntos abertos tem subcobertura finita (Propriedade de Heine-Borel).*
- (b) *K é fechado e limitado (Teorema de Heine, 1872 - Borel, 1895).*
- (c) *Todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K (Propriedade de Bolzano-Weierstrass).*
- (d) *Toda sequência em K admite subsequência convergente em K . (Fréchet, 1906 - Definição de espaço sequencialmente compacto).*

Prova.

(a) \Rightarrow (b)

Dado $z \in K^c$, consideremos a sequência decrescente de discos fechados $\overline{D}(z; 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D}(z; 1/n) = \{z\}$ (vide Figura 3).

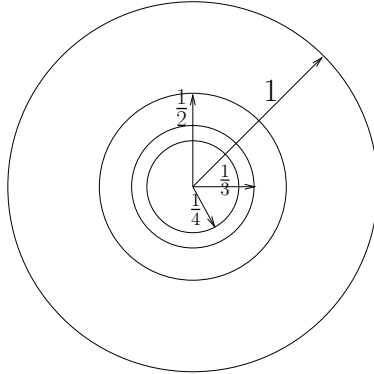


Figura 3: Ilustração 1 à prova do Teorema de Heine-Borel.

Passando ao complementar temos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{D}(z; 1/n)^c = \{z\}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$, uma óbvia cobertura de K pela reunião de uma sequência crescente de abertos. Por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \overline{D}(z; 1/N)^c$. Passando novamente ao complementar temos,

$$K^c \supset \overline{D}(z; 1/N) \supset D(z; 1/N) \supset \{z\}.$$

Logo, o complementar K^c é aberto e K é fechado.

Mostremos que K é limitado. Já que $K \subset \bigcup_{z \in K} D(z; 1)$, segue que existem z_1, \dots, z_n em K tais que $K \subset D(z_1; 1) \cup \dots \cup D(z_n; 1)$. É claro que $K \subset D(0; |z_1| + \dots + |z_n| + 1)$ [vide Figura 4].

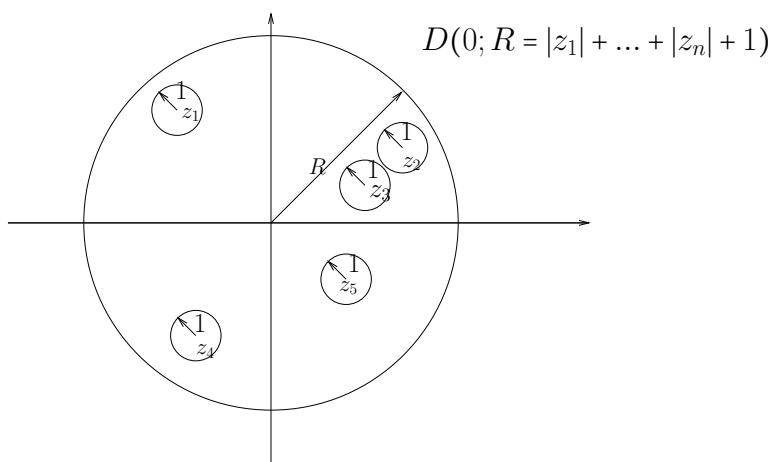


Figura 4: Ilustração 2 à prova do Teorema de Heine-Borel.

(b) \Rightarrow (c)

Seja Z um subconjunto infinito de pontos distintos de K . Seja Q_0 um quadrado fechado e limitado, com arestas de comprimento L , contendo K . É óbvio que Q_0 contém infinitos pontos de Z . Tendo construído o quadrado Q_n , com arestas de comprimento $L/2^n$, tal que $Q_n \cap Z$ é infinito procedemos dividindo Q_n em quatro sub-quadrados, com arestas de comprimento $L/2^{n+1}$, e escolhemos entre estes o sub-quadrado Q_{n+1} com infinitos pontos de K (vide Figura 5).

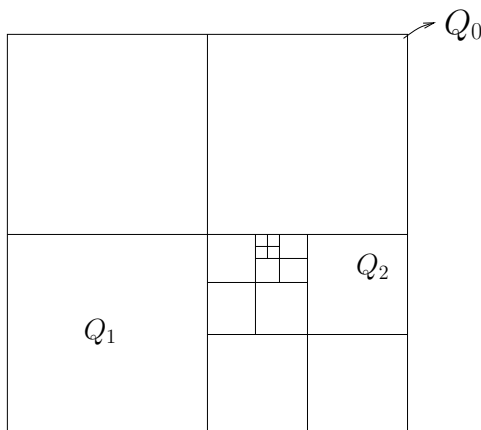


Figura 5: Esboço à prova da Propriedade de Bolzano-Weierstrass.

Temos então contruída por indução uma sequência de quadrados Q_n , $n \in \{0, 1, \dots\}$. Pelo Princípio dos Intervalos Encaixantes segue que $\bigcap Q_n = \{p\}$, p em \mathbb{R}^2 . Toda bola aberta centrada em p contém um quadrado Q_n com infinitos pontos de Z . Logo, p é um ponto de acumulação de Z . Ainda, $p \in \overline{Z} \subset \overline{K} = K$.

(c) \Rightarrow (d)

Seja (z_n) uma sequência em K . Se $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito então, existe $J = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ tal que a subsequência (z_{n_k}) é constante e portanto convergente. Se Z é infinito, por hipótese Z tem um ponto de acumulação $z \in K$. Então, todo disco $D(z; r)$, $r > 0$, contém infinitos pontos de Z . Assim, é fácil ver que existem índices $n_1 < \dots < n_k < \dots$ tais que $z_{n_k} \in D(z; 1/k)$. Logo, a subsequência (z_{n_k}) converge a $z \in K$.

(d) \Rightarrow (a)

Seja O um aberto arbitrário em \mathbb{R}^2 . Para cada $z \in O$, existe $n = n(z) \in \mathbb{N}$ tal que $D(z; 1/n) \subset O$. Então, como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é denso em \mathbb{R}^2 , segue que existe $w = w(z; n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tal que $|w - z| < \frac{1}{2n}$. É fácil ver que $z \in D(w; \frac{1}{2n}) \subset O$ (vide Figura 6).

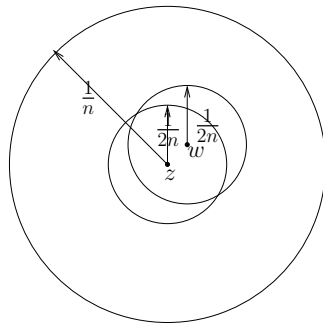


Figura 6: Ilustração à prova da Propriedade de Heine-Borel.

Logo, $O = \bigcup_{z \in O} D(w(z; n); \frac{1}{2n})$. Assim, todo aberto O é uma união enumerável de conjuntos da coleção enumerável $\mathcal{C} = \{D_1, D_2, \dots, D_n, \dots\}$ de discos abertos centrados em pontos de coordenadas racionais e de raio racional.

Desta forma dada $\bigcup_{j \in J} O_j$ uma cobertura de K por conjuntos abertos, podemos extrair dela uma subcobertura enumerável de K , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

Trocando O_n por $O_1 \cup \dots \cup O_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perder a generalidade, que (O_n) é uma seqüência crescente de abertos. Suponhamos que $\bigcup_n O_n$ não admite uma subcobertura finita. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K \setminus O_n$. Por hipótese, a seqüência (z_n) tem subsequência (z_{n_k}) convergente a $z \in K$. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z \in O_N$. Logo, existe $n_k > N$ tal que $z_{n_k} \in O_N$. Por outro lado, por construção $z_{n_k} \notin O_{n_k}$ e $O_{n_k} \supset O_N$. Donde, $z_{n_k} \notin O_N$ ∇

A definição padrão para compacidade é a enunciada no Teorema 4 (a).

CONTINUIDADE

Em cursos de Cálculo em uma variável real é visto que a descontinuidade de uma função pode ser de primeira espécie, também dita de tipo “salto” (os limites laterais existem e são distintos), e de segunda espécie (ao menos um dos limites laterais não existe). Mostremos que dada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, $A \subset \mathbb{R}^2$, podemos medir sua continuidade/descontinuidade em pontos de A .

Definição. Para cada $\delta > 0$ sejam

$$M(a, f, \delta) = \sup \left\{ f(x) : x \in A \text{ e } |x - a| < \delta \right\}$$

$$m(a, f, \delta) = \inf \left\{ f(x) : x \in A \text{ e } |x - a| < \delta \right\}$$

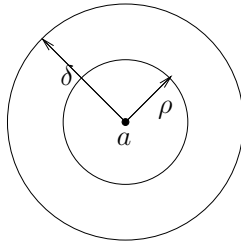


Figura 7: $0 < \rho < \delta \Rightarrow m(a, f, \delta) \leq m(a, f, \rho) \leq M(a, f, \rho) \leq M(a, f, \delta)$.

Fixado a em A , é fácil ver que $M(a, f, \delta)$ é uma função decrescente quando $\delta \rightarrow 0$ e que $m(a, f, \delta)$ é uma função crescente quando $\delta \rightarrow 0$ (v. Fig. 7).

Assim, a diferença $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)$ é decrescente quando $\delta \rightarrow 0$. Consequentemente, sempre existe a oscilação de f em a :

$$\text{osc}(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)].$$

Proposição 5 (Propriedades da Oscilação). *São válidas,*

- (i) f é contínua em a se e somente se $\text{osc}(f, a) = 0$.
- (ii) Dado $\epsilon > 0$, existe um aberto \mathcal{O} em \mathbb{R}^2 tal que

$$\{a \in A : \text{osc}(f, a) < \epsilon\} = \mathcal{O} \cap A.$$

- (iii) Se A é fechado então, para todo $\epsilon > 0$, é fechado o conjunto

$$\{a \in A : \text{osc}(f, a) \geq \epsilon\}.$$

Prova.

- (i) (\Rightarrow) Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ se $|x - a| < \delta$ e $x \in A$. Logo, $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) \leq 2\epsilon$. Donde segue, $\text{osc}(f, a) \leq 2\epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$. Logo, $\text{osc}(f, a) = 0$.

(\Leftarrow) Solicitamos ao leitor.

- (ii) Fixemos a arbitrário em $A_\epsilon = \{a \in A : \text{osc}(f, a) < \epsilon\}$. Então, existe $\delta = \delta_a > 0$ tal que $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) < \epsilon$. Ainda, para um ponto arbitrário $x \in B(a; \delta)$ e considerando o raio $r = \delta - |x - a| > 0$, é claro que temos $B(x; r) \subset B(a; \delta)$. Vide Figura 8.

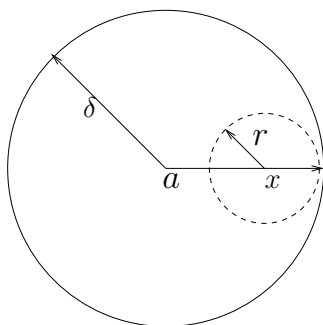


Figura 8: Ilustração à Propriedade da Oscilação

Portanto, para todo ponto $x \in B(a; \delta) \cap A$ é válida a desigualdade $M(x, f, r) - m(x, f, r) \leq M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) < \epsilon$. Assim, para todo x na intersecção $B(a; \delta) \cap A$ temos $\text{osc}(f, x) < \epsilon$. Finalmente, para a percorrendo A_ϵ , escolhemos $\mathcal{O} = \bigcup_{a \in A_\epsilon} B(a; \delta_a)$.

- (iii) Basta notar que por (ii) temos $\{a \in A : \text{osc}(f, a) \geq \epsilon\} = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}) \cap A$ ■

Observação. Seja D o conjunto de descontinuidades da função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, com f limitada. Dado $\epsilon > 0$, seja

$$D_\epsilon = \{a \in A : \text{osc}(f, a) > \epsilon\}.$$

É fácil ver que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup D_{\frac{1}{3}} \cup \dots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \dots .$$

Definição. Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, com A contido em \mathbb{R}^2 , é *uniformemente contínua* se dado $\epsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(a) - f(b)| < \epsilon \text{ se } |a - b| < \delta, \text{ onde } a \in A \text{ e } b \in A.$$

Teorema 6. Consideremos $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com K compacto em \mathbb{R}^2 . Então, f é uniformemente contínua.

Prova. Por contradição.

Suponhamos existir $\epsilon > 0$ tal que qualquer que seja $\delta_n = 1/n$, existam pontos a_n e b_n , ambos em K , tais que

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(a_n) - f(b_n)| > \epsilon.$$

Pelo Teorema 3(d), a sequência (a_n) contém uma subsequência (a_{n_k}) convergente a um ponto p em K . É fácil ver que $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$, $n_3 \geq 3, \dots$. Assim, temos $|a_{n_k} - b_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}$, para todo k em \mathbb{N} . Então [reenumerando as subsequências (a_{n_k}) e (b_{n_k}) se necessário], podemos supor sem perda de generalidade que $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que (a_n) converge a p . Pela última desigualdade, a sequência $(a_n - b_n)$ converge a zero. Portanto, a sequência (b_n) também converge a p . Pela continuidade de f segue,

$$0 < \epsilon \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(a_n) - f(b_n)| = |f(p) - f(p)| = 0 \text{ } \not\leq$$

CONTEÚDO NULO E MEDIDA NULA.

Definição. Seja D contido em R^n , com $n \in \{1, 2, 3\}$.

- D tem **conteúdo nulo** se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita de retângulos compactos R_1, R_2, \dots, R_k tais que $D \subset R_1 \cup \dots \cup R_k$ e

$$\sum_{i=1}^k m(R_i) < \epsilon,$$

com $m(R_i)$ a *medida euclideana* (comprimento/área/volume) de R_i .

- D tem **medida nula** se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de retângulos compactos $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ tais que $D \subset R_1 \cup \dots \cup R_k \cup \dots$ e

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} m(R_i) \leq \epsilon \text{ [isto é, } m(R_1) + \dots + m(R_k) \leq \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}\text{].}$$

Nas definições acima de conteúdo nulo e de medida nula, se trocarmos a condição "retângulos compactos" pela condição "retângulos abertos e limitados" obtemos definições equivalentes às enunciadas. Verifique.

Exemplo 1. Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, com R um retângulo em \mathbb{R}^2 . Então, $\text{Gr}(f)$, o gráfico de f , tem conteúdo nulo em \mathbb{R}^3 .

Solução. Utilizemos as notações para as somas de Darboux. Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema 2 existe uma partição de R em sub-retângulos R_{ij} , onde $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l$, tais que

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (M_{ij} - m_{ij}) m(R_{ij}) < \epsilon.$$

A coleção de paralelepípedos $S_{ij} = R_{ij} \times [m_{ij}, M_{ij}]$ recobre $\text{Gr}(f)$. Ainda,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l m(S_{ij}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l m(R_{ij})(M_{ij} - m_{ij}) < \epsilon \blacksquare$$

Exemplo 2. Mostre que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável então o gráfico de f tem conteúdo nulo no plano.

Lema 7. *Seja K compacto e de medida nula. Então, K tem conteúdo nulo.*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\{R_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de retângulos abertos tal que $K \subset R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k \cup \dots$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} m(R_k) \leq \epsilon/2$. Como K é compacto, existe N tal que $K \subset R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_N$. É óbvio que $m(R_1) + \dots + m(R_N) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ ■

Lema 8. *Seja $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$ uma família contável (enumerável) de conjuntos de medida nula em \mathbb{R}^2 . Então, $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ tem medida nula.*

Prova. Seja $\epsilon > 0$. Como X_1 tem medida nula, segue que existe uma coleção contável de retângulos $R_1^1, R_2^1, R_3^1, \dots, R_i^1, \dots$ satisfazendo:

$$X_1 \subset R_1^1 \cup R_2^1 \cup \dots \cup R_i^1 \cup \dots \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^1) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, fixado um índice j arbitrário em \mathbb{N} , existe uma coleção enumerável de retângulos $R_1^j, R_2^j, \dots, R_i^j, \dots$ satisfazendo :

$$X_j \subset R_1^j \cup R_2^j \cup \dots \cup R_i^j \cup \dots \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto contável, segue que a coleção de retângulos $\mathcal{C} = \{R_i^j : i \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ é contável. Ainda mais, é trivial ver que qualquer subcoleção finita de retângulos em \mathcal{C} está contida em alguma sub-coleção finita do tipo $\{R_i^j : 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq N\}$, para N suficientemente grande. Também é fácil ver que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m(R_i^j) &= \sum_{i=1}^N m(R_i^1) + \sum_{i=1}^N m(R_i^2) + \dots + \sum_{i=1}^N m(R_i^N) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \dots + \frac{\epsilon}{2^N} = \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^N} \right) < \epsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente obtemos

$$\sum_{i,j} m(R_i^j) \leq \epsilon.$$

Logo, X tem medida nula ■

Teorema 9 (Caracterização - Lebesgue). *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, com R um retângulo fechado e limitado. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de f . Então, f é integrável se e só se D tem medida nula.*

Prova.

(\Rightarrow) Já vimos que $D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup \dots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \dots$, $D_{\frac{1}{n}} = \{x : \text{osc}(f; x) \geq 1/n\}$.

Como a união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula, basta provarmos que cada $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula. Fixemos n em \mathbb{N} .

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, seja \mathcal{P} uma partição de R tal que

$$S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Seja \mathcal{S} a coleção dos retângulos R_{ij} em \mathcal{P} que contém algum ponto de $D_{\frac{1}{n}}$ em seu interior. Para todo R_{ij} em \mathcal{S} temos $M_{ij} - m_{ij} \geq \frac{1}{n}$. Logo,

$$\frac{1}{n} \sum_{R_{ij} \in \mathcal{S}} m(R_{ij}) \leq \sum_{R_{ij} \in \mathcal{S}} (M_{ij} - m_{ij})m(R_{ij}) \leq S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Donde, $\sum_{R_{ij} \in \mathcal{S}} m(R_{ij}) < \epsilon$. É claro que $D_{\frac{1}{n}}$ está contido na união dos retângulos em \mathcal{S} com a união das arestas dos retângulos em \mathcal{P} . Tais arestas são retângulos de área zero e assim, cobrimos $D_{\frac{1}{n}}$ por um número finito de retângulos cuja soma das áreas é menor que ϵ . Logo, $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula.

(\Leftarrow) Dado $\epsilon > 0$ temos que $D_\epsilon = \{x \in R : \text{osc}(f, x) \geq \epsilon\}$ está contido em D e portanto tem medida nula. Pela Proposição 5 (iii) segue que D_ϵ é compacto. Então, pelo Lema 7, D_ϵ tem conteúdo nulo.

Consideremos uma quantidade finita de retângulos abertos R_1, \dots, R_l que recobre D_ϵ e tal que $m(R_1) + \dots + m(R_l) < \epsilon$.

Seja x um ponto arbitrário em $R \setminus (R_1 \cup \dots \cup R_l)$. Temos $\text{osc}(f, x) < \epsilon$. Logo, existe um retângulo aberto R_x centrado em x e de lados paralelos aos eixos tal que a oscilação de f em $R_x \cap R$ [isto é, $\sup_{R_x \cap R} f - \inf_{R_x \cap R} f$] é menor que ϵ . Então, como a reunião de tais retângulos abertos R_x recobre $K = R \setminus (R_1 \cup \dots \cup R_l)$, e K é compacto (pois fechado e limitado), temos que existem R_{x_1}, \dots, R_{x_m} tais que $K \subset R_{x_1} \cup \dots \cup R_{x_m}$.

Seja \mathcal{C} coleção de retângulos abertos $\{R_1, \dots, R_l, R_{x_1}, \dots, R_{x_m}\}$. É óbvio que R está contido na reunião dos retângulos em \mathcal{C} . Seja \mathcal{P} uma partição de R tal que cada sub-retângulo S de \mathcal{P} está contido em um dos retângulos da coleção \mathcal{C} . Separemos os sub-retângulos de \mathcal{P} em duas coleções: \mathcal{S}_1 com os sub-retângulos contidos em algum R_j , onde $1 \leq j \leq l$, e \mathcal{S}_2 com os demais sub-retângulos de \mathcal{P} .

Sejam M_S e m_S o supremo e o ínfimo de f retriba a S , respectivamente. Seja M tal que $|f(x)| \leq M$, para todo x em R . Notemos que, se S pertence a \mathcal{S}_2 então S está contido em algum sub-retângulo R_{x_j} , com $1 \leq j \leq m$, e temos $M_S - m_S < \epsilon$. Ainda, se $S \in \mathcal{S}_1$ então $M_S - m_S \leq 2M$. Finalmente, concluímos que

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{S \in \mathcal{S}_1} (M_S - m_S)m(S) + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} (M_S - m_S)m(S) \\ &\leq 2M \sum_{j=1}^l m(R_j) + \epsilon \sum_{S \in \mathcal{S}_2} m(S) \\ &\leq 2M\epsilon + \epsilon m(R) \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário 10. *Sejam f e g integráveis em R . Valem as propriedades,*

- (i) fg é integrável em R .
- (ii) *Suponhamos f positiva [isto é, $f \geq 0$]. Então, temos $\iint_R f dx dy = 0$ se e somente se f é nula com a possível exceção do conjunto de medida nula constituído por seus pontos de descontinuidade.*

Prova.

- (i) Sejam $D(fg)$, $D(f)$ e $D(g)$, os conjuntos dos pontos de descontinuidade de fg , f e g , respectivamente. É óbvio que $D(fg) \subset D(f) \cup D(g)$. Pelo Teorema 9 temos que $D(f)$ e $D(g)$ tem ambos medida nula. Então, pelo Lema 7, o conjunto $D(fg)$ tem medida nula. Pelo Teorema 9 concluímos a integrabilidade de fg .

(ii) (\Rightarrow) Seja (x_0, y_0) um ponto de continuidade de f . Então, existe um sub-retângulo não degenerado S [isto é, S tem área estritamente positiva], de R , com $f(x, y) \geq \frac{f(x_0, y_0)}{2}$ para todo $(x, y) \in S$. Logo,

$$0 \leq \frac{f(x_0, y_0)}{2} m(S) \leq \iint_S f dx dy = \iint_R f = 0.$$

Portanto, $f(x_0, y_0) = 0$.

(\Leftarrow) Seja \mathcal{P} uma partição arbitrária de R . Indiquemos por R_{ij} os sub-retângulos desta partição. Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula, segue que f não é descontínua em todos os pontos de R_{ij} . Logo, f é contínua em ao menos um ponto de R_{ij} . Então, devido à hipótese, f é nula em tal ponto. Obtemos então, para a soma inferior de f em relação a tal partição, $s(f; \mathcal{P}) = \sum_{i,j} m_{ij} m(R_{ij}) = 0$. Como esta soma inferior é arbitrária e f é integrável, concluímos que a integral de f é zero ■

INTEGRAÇÃO SOBRE NÃO RETÂNGULOS

Seja A um subconjunto limitado de \mathbb{R}^2 . A função característica de A é,

$$\chi_A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in A \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e R um retângulo arbitrário fechado e limitado que contém A . Qualquer que seja a definição de f em $R \setminus A$, temos $f(x, y)\chi_A(x, y) = f(x, y)$ se $(x, y) \in A$ e $f(x, y)\chi_A(x, y) = 0$ se $(x, y) \in R \setminus A$.

Introduzimos então a notação

$$(f\chi_A)(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in A \\ 0, & \text{se } (x, y) \in R \setminus A. \end{cases}$$

A função f é dita integrável em A se $f\chi_A$ é integrável em R . Indicamos, vide Figura 9,

$$\iint_A f dx dy = \iint_R f\chi_A dx dy.$$

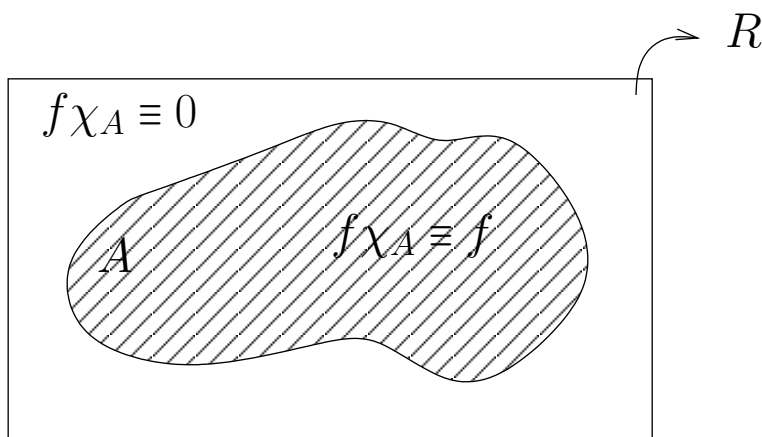


Figura 9: Ilustração à definição de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável

Exercício. Verifique que a definição da integrabilidade, e da integral, de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ independem do particular retângulo compacto contendo A .

Proposição 11. A função χ_A é integrável se e só se ∂A tem conteúdo nulo.

Prova.

Notemos que $\bar{A} = \text{int}(A) \cup \partial(A)$. Portanto,

$$\mathbb{R}^2 = \text{int}(A) \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}).$$

É claro que χ_A é constante e contínua nos abertos $\text{int}(A)$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}$. Se $x \in \partial A$, toda bola aberta (não degenerada) centrada em x contém pontos em que $\chi_A = 1$, e pontos em que $\chi_A = 0$. Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ_A é a fronteira de A .

Seja R um retângulo fechado e limitado tal que $\partial A \subset \bar{A} \subset \text{int}(R) \subset R$.

O conjunto dos pontos de descontinuidade de χ_A restrita a R é também ∂A [verifique]. Então, pelo Teorema 9, a função χ_A é integrável em R se e só se ∂A tem medida nula. Por fim, visto que ∂A é compacto, pelo Lema 7 segue que para ∂A são equivalentes ter medida nula ou conteúdo nulo ■

Exercício. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e A um subconjunto limitado do plano com fronteira de conteúdo nulo. Mostre que f é integrável.

Como consequência das propriedades da integral sobre retângulos temos que dadas duas funções f e g integráveis em A e uma constante real λ então, as funções $f + g$ e λf são integráveis em A e valem as propriedades,

$$\iint_A [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy + \iint_A g(x, y) dx dy,$$

$$\iint_A \lambda f(x, y) dx dy = \lambda \iint_A f(x, y) dx dy \text{ e}$$

$$\iint_A f(x, y) dx dy \geq \iint_A g(x, y) dx dy, \text{ se } f \geq g.$$

Notação. Dado $X \subset \mathbb{R}^2$ e λ uma constante real, seja

$$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}.$$

Proposição 12. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 por partes. Então, a imagem de γ tem conteúdo nulo.*

Prova. É fácil ver que podemos supor que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é C^1 em todo o intervalo $[0, 1]$. Como a função $\gamma'(t)$ é contínua e limitada, vemos que a imagem de γ' está contida em algum quadrado $Q = [-r, r] \times [-r, r]$, com $r > 0$. Pelo teorema do valor médio, fixados $0 \leq t \leq s \leq 1$ segue que existem ξ_1 e ξ_2 , ambos no intervalo $[t, s]$, tais que $\gamma(s) - \gamma(t) = (s - t)(x'(\xi_1), y'(\xi_2))$. Logo,

$$(12.1) \quad \gamma(s) \text{ pertence ao conjunto } \gamma(t) + (s - t)Q.$$

A seguir, dado n arbitrário em \mathbb{N} , consideremos a partição $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ do intervalo $[0, 1]$ e os n sub-intervalos $[j/n, (j+1)/n]$, com $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Fixemos um tal j . Dado s no intervalo $[j/n, (j+1)/n]$, por (12.1) temos que o ponto $\gamma(s)$ pertence ao conjunto $\gamma(\frac{j}{n}) + (s - \frac{j}{n})Q$. Desta forma, definindo $P_j = \gamma(\frac{j}{n})$ e observando que $(s - \frac{j}{n})Q \subset \frac{1}{n}Q$, concluímos que

$$\gamma(s) \in P_j + \frac{1}{n}Q, \text{ para todo } s \text{ em } [j/n, (j+1)/n].$$

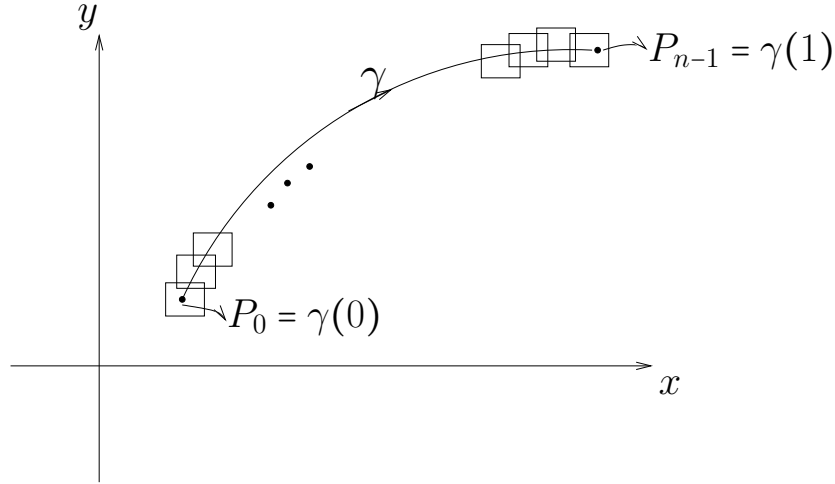


Figura 10: Ilustração à Proposição 12

Assim, a imagem de γ está contida na reunião dos retângulos $R_j = P_j + \frac{1}{n}Q$ (transladados do retângulo $\frac{1}{n}Q$), j percorrendo $\{0, \dots, n-1\}$. Vide Fig. 10.

É fácil ver que

$$m(R_0) + \dots + m(R_{n-1}) = n \left(\frac{2r}{n} \right)^2 = \frac{4r^2}{n}.$$

Desta forma, é trivial concluir que a imagem de γ tem conteúdo zero ■

Definição. Seja A limitado em \mathbb{R}^2 , com fronteira de conteúdo nulo.

$$\text{A área de } A \text{ é } m(A) = \iint_A dx dy.$$

Lema 13. Seja A um subconjunto limitado de \mathbb{R}^2 . Então,

- (i) A tem conteúdo nulo se e somente se \bar{A} tem conteúdo nulo
- (ii) Se A tem conteúdo nulo então, ∂A tem conteúdo zero.
- (iii) A tem conteúdo nulo se e somente se A tem área zero.
- (iv) Suponhamos que ∂A tem conteúdo nulo. Então, temos $m(A) > 0$ se e somente se A contém um retângulo não degenerado.
- (v) Se A tem área zero então, para toda função limitada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ temos

$$\iint_A f(x, y) dx dy = 0.$$

Prova.

(i) e (ii) Devido à inclusão $A \subset \overline{A}$, segue que se \overline{A} tem conteúdo nulo então A também tem conteúdo nulo. Suponhamos a seguir que A tem conteúdo nulo. Então, dado $\epsilon > 0$, sejam R_1, \dots, R_N retângulos fechados e limitados satisfazendo $A \subset R_1 \cup \dots \cup R_N$ e $m(R_1) + \dots + m(R_N) < \epsilon$. É fácil ver que $\partial A \subset \overline{A} \subset R_1 \cup \dots \cup R_N$. Logo, \overline{A} e ∂A tem conteúdo nulo.

(iii) (\Rightarrow) Por (ii) e pela Proposição 11, a função χ_A é integrável. Com a notação na prova dos itens acima temos $\chi_A \leq \chi_{R_1} + \dots + \chi_{R_N}$. Logo,

$$0 \leq \iint_A dx dy \leq \iint_{R_1} dx dy + \dots + \iint_{R_N} dx dy = m(R_1) + \dots + m(R_N) < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, segue $\iint_A dx dy = 0$. Logo, A tem área zero.

(\Leftarrow) Sejam $\epsilon > 0$ e R um retângulo compacto contendo A . Temos, por hipótese, $\inf\{S(\chi_A; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } R\} = 0$. Seja \mathcal{P} uma partição de R , constituída por sub-retângulos R_{ij} , satisfazendo $S(\chi_A; \mathcal{P}) = \sum_{i,j} M_{ij} m(R_{ij}) < \epsilon$, onde $M_{ij} = \sup_{R_{ij}} \chi_A$ vale 0 ou 1. Consideremos a coleção de sub-retângulos $\mathcal{C} = \{R_{ij} : M_{ij} = 1\}$. É fácil ver que temos $A \subset \bigcup_{R_{ij} \in \mathcal{C}} R_{ij}$ e $\sum_{R_{ij} \in \mathcal{C}} m(R_{ij}) < \epsilon$.

(iv) (\Rightarrow) Seja R um retângulo compacto contendo A . Pelo Corolário 10 (i), a função positiva $\chi_A : R \rightarrow \mathbb{R}$ não é nula em algum ponto de continuidade. Logo, existe $a \in A$ no qual χ_A é contínua. Como χ_A assume apenas os valores 0 e 1, segue que existe um retângulo aberto S , contido em R e contendo a , tal que temos $\chi_A(x) = 1$, para todo $x \in S$. Isto é, o retângulo aberto S está contido em A .

(\Leftarrow) Trivial.

(v) Seja R um retângulo fechado e limitado e contendo A . É fácil ver que $R = \text{int}(A) \cup \partial A \cup (R \setminus \overline{A})$. Em $R \setminus \overline{A} = R \cap \overline{A}^c$, a função $f\chi_A$ é nula e contínua [verifique, note que \overline{A}^c é aberto]. Logo, os pontos de descontinuidade de $f\chi_A$ estão em $\text{int}(A) \cup \partial A$, que tem conteúdo nulo. Assim, $f\chi_A$ é integrável. Seja M tal que $-M \leq f(x, y) \leq M$, para todo (x, y) em A . Temos, $\iint_A (-M) dx dy \leq \iint_A f(x, y) dx dy \leq \iint_A M dx dy$. Donde concluímos que $\iint_A f(x, y) dx dy = 0$ ■

Comentários

- Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e ∂A de conteúdo nulo. Consideremos $B \subset A$ com B de conteúdo nulo. Vejamos que podemos trocar f sobre B por qualquer $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ limitada sem alterarmos o valor da integral de f em A . Verifiquemos que $f + g\chi_B$, definida em A , é integrável e $\iint_A (f + g\chi_B) dx dy = \iint_A f dx dy$. De fato, basta ver que dado R um retângulo compacto contendo A (v. Fig. 11) então, pelo Lema 13 (v),

$$0 = \iint_B g dx dy = \iint_R g \chi_B dx dy = \iint_R g \chi_B \chi_A dx dy = \iint_A g \chi_B dx dy.$$

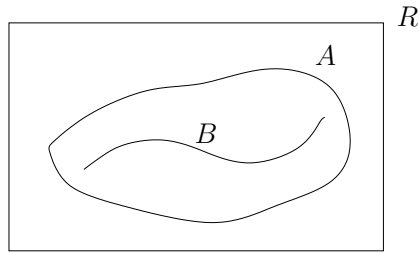


Figura 11: Ilustração ao comentário acima

- Dada uma função integrável, não podemos alterá-la livremente em um conjunto de medida nula e mantermos a integrabilidade. Seja f a função nula, integrável e contínua, no quadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Então, $B = Q \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ é contável, denso em Q , e de medida nula (mostre). A função $\chi_B : Q \rightarrow \mathbb{R}$ (v. Fig 12) difere de f apenas sobre B . Mas, χ_B é descontínua em todo ponto e não é integrável.

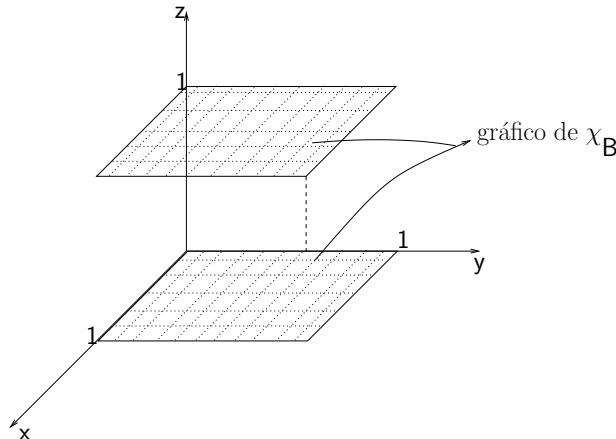


Figura 12: Ilustração ao gráfico da função χ_B

O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Definição. Um subconjunto X de \mathbb{R}^2 é **conexo por caminhos** se dados dois pontos arbitrários p e q , ambos em X , então, existe uma curva contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ com ponto inicial $\gamma(0) = p$ e ponto final $\gamma(1) = q$ (v. Fig. 13).

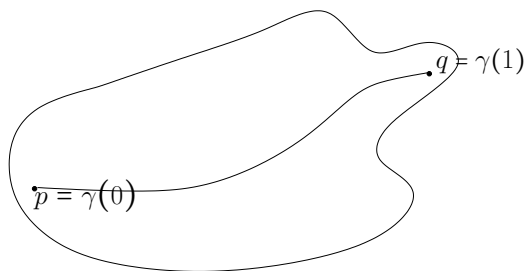


Figura 13: Ilustração a um conjunto conexo por caminhos

Lema 14. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com X um subconjunto conexo por caminhos de \mathbb{R}^2 . Então, a imagem de f é um intervalo.

Prova.

Seja c um número real entre dois números em $f(X)$, $f(x_1, y_1)$ e $f(x_2, y_2)$. Por hipótese, existe uma curva contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ com $\gamma(0) = (x_1, y_1)$ e $\gamma(1) = (x_2, y_2)$. A função contínua $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(\gamma(0)) = f(x_1, y_1)$ e $f(\gamma(1)) = f(x_2, y_2)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, a imagem de $f \circ \gamma$ é um intervalo. Logo, existe $\bar{t} \in [0, 1]$ tal que $f(\gamma(\bar{t})) = c$ ■

Teorema 15. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e contínua, com A conexo por caminhos e ∂A com conteúdo nulo. Então, existe (\bar{x}, \bar{y}) em A tal que

$$\iint_A f(x, y) dx dy = f(\bar{x}, \bar{y}) m(A).$$

Prova.

Pela Proposição 11, o conjunto A tem área. Isto é, existe o número $m(A)$. Se $m(A) = 0$, pelo Lema 13 (v) segue $\iint_A f dx dy = 0$. Neste caso, qualquer (\bar{x}, \bar{y}) em A nos serve. Suponhamos, a seguir, $m(A) > 0$. Ressaltamos que, pelo Lema 13 (iv), o interior de A é não vazio. Evidentemente temos $\inf f(A) = m \leq f(x, y) \leq M = \sup f(A)$, para todo ponto (x, y) em A , e

$$m \leq \frac{\iint_A f dx dy}{m(A)} \leq M.$$

Analisemos três casos.

- (i) Caso $m < \frac{\iint_A f dx dy}{m(A)} < M$. Por definição de ínfimo e supremo, existem (x_1, y_1) em A e (x_2, y_2) em A satisfazendo

$$f(x_1, y_1) < \frac{\iint_A f dx dy}{m(A)} < f(x_2, y_2).$$

Então, pelo Lema 14, o número $\frac{\iint_A f dx dy}{m(A)}$ pertence à imagem de f .

- (ii) Caso $\frac{\iint_A f dx dy}{m(A)} = M$. Temos $\iint_A (M - f) dx dy = 0$, com $M - f$ uma função contínua e positiva [isto é, $M - f \geq 0$] e A um conjunto com interior não vazio. Pelo Corolário 10 (ii), a função $M - f$ é nula nos retângulos abertos contidos em A . Logo, qualquer (\bar{x}, \bar{y}) em $\text{int}(A)$ nos serve.
- (iii) Caso $\frac{\iint_A f dx dy}{m(A)} = m$. Segue do caso (ii) aplicado à função $-f$ ■

TEOREMA DE FUBINI

Lema 16. *Seja f integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, as funções definidas no intervalo $[a, b]$,*

$$\mathcal{I}(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad e \quad \mathcal{S}(x) = \int_a^b f(x, y) dy,$$

são integráveis e

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \mathcal{I}(x) dx = \int_a^b \mathcal{S}(x) dx.$$

Prova.

Seja $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ uma partição de R , com $\mathcal{P}_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d\}$. Para i em $\{1, \dots, n\}$ e j em $\{1, \dots, m\}$, sejam $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $m_{ij} = \inf f(R_{ij})$ e $M_{ij} = \sup f(R_{ij})$. Com tais notações temos,

$$s(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} m(R_{ij}) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \right] \Delta x_i.$$

Fixado x em $[x_{i-1}, x_i]$, é fácil ver que $m_{ij} \leq \inf_{y \in [y_{j-1}, y_j]} f(x, y)$. Logo,

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m \left[\inf_{y \in [y_{j-1}, y_j]} f(x, y) \right] \Delta y_j \leq \int f(x, y) dy = \mathcal{I}(x).$$

Donde, já que x é arbitrário em $[x_{i-1}, x_i]$, segue que

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \right] \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \left[\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \mathcal{I}(x) \right] \Delta x_i = s(\mathcal{I}, \mathcal{P}_1).$$

Isto é, mostramos $s(f; \mathcal{P}) \leq s(\mathcal{I}; \mathcal{P}_1)$. Trocando f por $-f$ encontramos $s(-f; \mathcal{P}) \leq s(-\mathcal{S}; \mathcal{P}_1)$. Donde segue, $S(\mathcal{S}; \mathcal{P}_1) \leq S(f; \mathcal{P})$. Resumindo, temos

$$s(f; \mathcal{P}) \leq s(\mathcal{I}; \mathcal{P}_1) \leq S(\mathcal{I}; \mathcal{P}_1) \leq S(\mathcal{S}; \mathcal{P}_1) \leq S(f; \mathcal{P}).$$

Assim, como f é integrável, \mathcal{I} é integrável e sua integral é igual à de f .

Trocando f por $-f$ temos que $-\mathcal{S}$ é integrável com mesma integral que $-f$ ■

Teorema (Fubini) 17. *Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável.*

- (i) *Com a possível exceção de um conjunto de medida nula em $[a, b]$ e de um conjunto de medida nula em $[c, d]$, estão respectivamente bem definidas as integrais $\int_c^d f(x, y) dy$ e $\int_a^b f(x, y) dx$.*
- (ii) *Definamos as integrais acima, nos subconjuntos em que elas não existem, como ou a respectiva função integral inferior ou a respectiva função integral superior. As funções assim obtidas, respectivamente definidas em $[a, b]$ e em $[c, d]$, são integráveis e satisfazem*

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Prova. Pelo Lema 16 temos

$$\int_a^b \left[\overline{\int} f(x, y) dy - \underline{\int} f(x, y) dy \right] dx = 0,$$

com o integrando positivo. Portanto, existe um conjunto de medida nula $X \subset [a, b]$ tal que [vide Corolário 10 (ii)]

$$\underline{\int} f(x, y) dy = \overline{\int} f(x, y) dy = \int_c^d f(x, y) dy, \text{ se } x \in [a, b] \setminus X.$$

Definamos $\int_c^d f(x, y)dy$, em X , como a função $\underline{\int} f(x, y)dy$, ou como a função $\overline{\int} f(x, y)dy$. Seja qual for a escolha, pelo Lema 16 temos (v. Fig. 14)

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

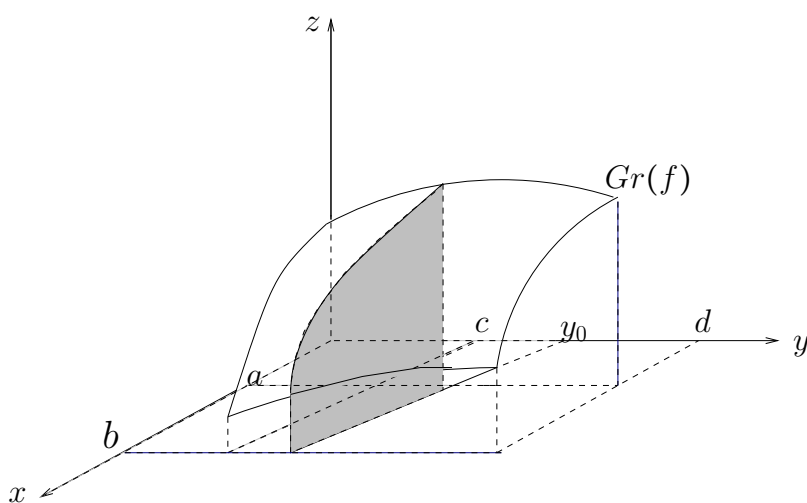


Figura 14: Ilustração ao Teorema de Fubini

Para finalizar, consideremos a função $g : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(y, x) = f(x, y)$. É fácil ver que g é integrável, com mesma integral que f . Pelos fatos já provados temos que a menos de um conjunto Y de medida nula em $[c, d]$ está bem definida a integral $\int_a^b g(y, x)dx = \int_a^b f(x, y)dx$. Sobre o conjunto Y definimos esta integral de forma análoga a adotada no parágrafo acima. Assim procedendo, a função na variável y dada por $\int_a^b g(y, x)dx$ é integrável em $[c, d]$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \iint_{[c,d] \times [a,b]} g(y, x) dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b g(y, x) dx dy \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \blacksquare \end{aligned}$$

Comentários. Mantenhamos a notação do teorema, e de sua prova, acima.

- Se X , o conjunto dos pontos de $[a, b]$ tais que não existe $\int_c^d f(x, y)dy$, tem conteúdo nulo então podemos definir tais integrais em tais pontos como qualquer valor real (por exemplo, zero). Evidentemente, segue uma observação análoga com respeito ao correspondente subconjunto $Y = \{y \in [c, d] : \text{não existe } \int_a^b f(x, y)dx\}$.
- Se $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então existem as integrais

$$\int_a^b f(x, y)dx, \quad \forall y \text{ em } [c, d], \quad \text{e} \quad \int_c^d f(x, y)dy, \quad \forall x \text{ em } [a, b].$$

- Chamamos de integrais iteradas de f às integrais

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx \quad \text{e} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx dy.$$

- O teorema chamado “Fubinito” ou “Fubininho” ou “Baby Fubini” afirma apenas que, sob certas condições, temos

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx dy.$$

- Se f é positiva [i.e., $f \geq 0$ em todo ponto] então o número

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y)dx dy$$

é o volume do subconjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Exercício. Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a, b]$ e tais que, para todo x em $[a, b]$ temos $c(x) \leq d(x)$. Seja

$$B = \{(x, y); a \leq x \leq b \text{ e } c(x) \leq y \leq d(x)\}.$$

Isto é, B é a região limitada pelos gráficos das funções $c = c(x)$ e $d = d(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$. Vide Figura 15.

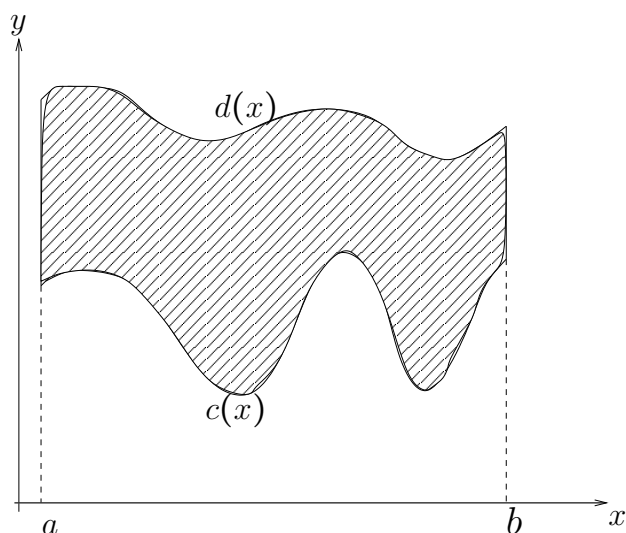


Figura 15: Ilustração ao exercício acima

Considere $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Verifique que

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Exercício. Enuncie e verifique um resultado análogo ao apresentado no exercício acima para duas funções contínuas $a(y)$ e $b(y)$ definidas em $[c, d]$. Faça um esboço.

MUDANÇA DE VARIÁVEL

Nesta seção motivamos o Teorema de Mudança de Variáveis em duas variáveis. Para tal apresentamos, na ordem abaixo,

- (1) Um esboço da demonstração usualmente encontrada em textos clássicos.
- (2) Um enunciado razoavelmente geral, para este curso, do teorema.
- (3) Uma demonstração bastante instrutiva de uma versão simplificada.

Uma prova no contexto da teoria da integração de Riemann requer uma razoável quantidade de cuidados, os quais são interessantes e importantes mas dispensáveis em um curso introdutório (vide referência [7]). Uma prova mais elegante pode ser dada com a teoria da integração de Lebesgue.

Observação. Sejam $\langle a, b \rangle$ e $\langle c, d \rangle$, vetores em \mathbb{R}^2 , como na figura abaixo.

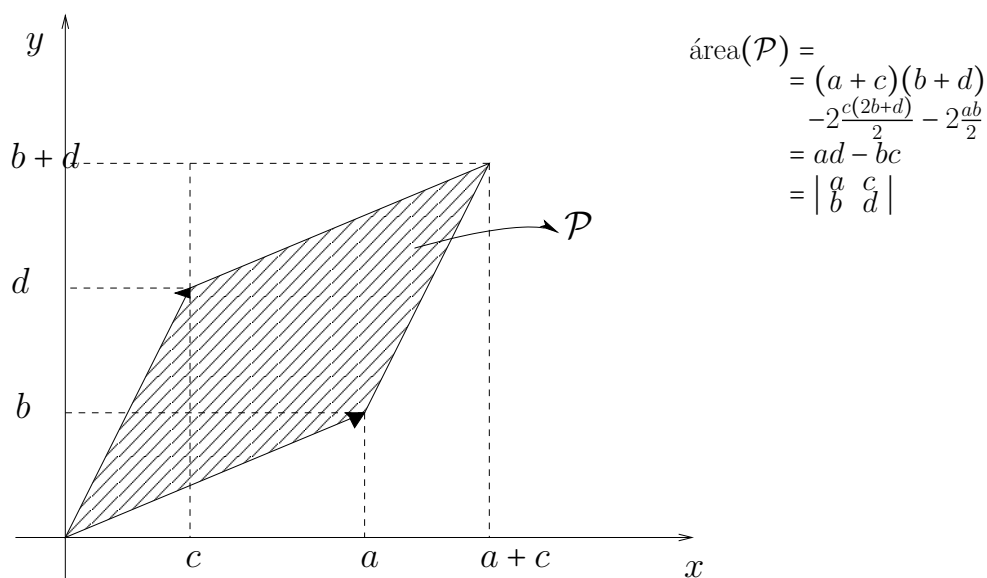


Figura 16: O Determinante e a Área de um Paralelogramo

Pela Figura 16, a área do paralelogramo determinado por $\langle a, b \rangle$ e $\langle c, d \rangle$ é o módulo do determinante 2×2 cujas colunas são dadas por tais vetores. Na figura acima, o determinante é positivo pois o conjunto ordenado $\{\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle\}$ é uma base ordenada positivamente orientada do plano.

(1) Esboço de uma Prova do Teorema de Mudança de Variável

Consideremos uma função $\varphi \in C^1(R; \mathbb{R}^2)$ inversível com inversa de classe C^1 , onde $R = [a, b] \times [c, d]$ (i.e., φ é de classe C^1 em um aberto contendo R). Seja $B = \varphi(R)$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Seja também $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, com

$$\mathcal{P}_1 = \{u_0 = a < u_1 < \dots < u_n = b\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 = \{v_0 = c < v_1 < \dots < v_m = d\},$$

uma partição de R com sub-retângulos $R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$, tais que $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Definamos $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ e $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$. Introduzamos os conjuntos (vide Figura 17)

$$B_{ij} = \varphi(R_{ij}) = \{(x, y) = \varphi(u, v) : (u, v) \in R_{ij}\}.$$

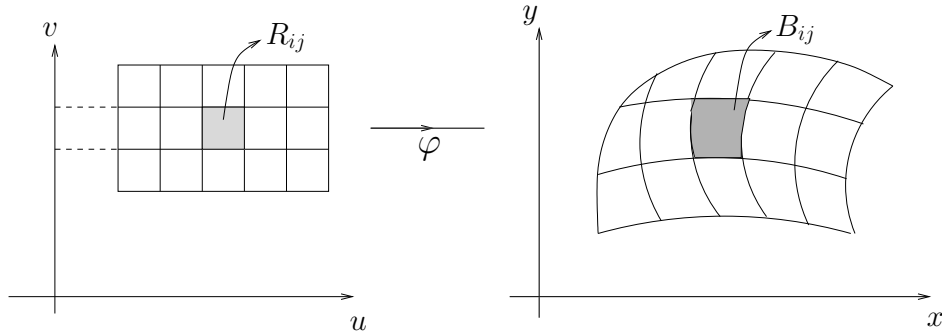


Figura 17: Ilustração ao Teorema de Mudança de Variável

Se a partição \mathcal{P} é fina o suficiente então, a área de cada região $B_{ij} = \varphi(R_{ij})$ é aproximadamente a área do paralelogramo determinado pelos vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j.$$

Isto é,

$$\text{área}(B_{ij}) \approx \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Escrevamos a função $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, segundo suas funções coordenadas. Desta forma, considerando a matriz jacobiana de φ temos

$$J\varphi(u_i, v_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix} (u_i, v_j),$$

sendo que o determinante jacobiano é a área orientada do paralelogramo determinado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j)$.

Portanto, temos que

$$\text{área}(B_{ij}) \approx |\det J\varphi(u_i, v_j)|\Delta u_i\Delta v_j.$$

Introduzindo os pontos $(x_i, y_j) = \varphi(u_i, v_j)$ em B_{ij} temos

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j)m(B_{ij}) \approx \sum_{i,j} f(\varphi(u_i, v_j))|\det J\varphi(u_i, v_j)|\Delta u_i\Delta v_j,$$

com o símbolo $\sum_{i,j}$ indicando o somatório sobre todos os índices i e j dados. Graças a esta última aproximação é razoável esperar que, conforme a norma da partição \mathcal{P} [isto é, o número $|\mathcal{P}| = \max\{\Delta u_1, \dots, \Delta u_n, \Delta v_1, \dots, \Delta v_m\}$] tende a zero, encontremos a identidade

$$\iint_B f(x, y)dxdy = \iint_R f(\varphi(u, v))|\det J\varphi(u, v)|dudv.$$

(2) O Teorema de Mudança de Variável na Integral Dupla

Teorema 18. *Seja $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde K é um compacto em \mathbb{R}^2 com fronteira de conteúdo nulo, de classe C^1 em um aberto contendo K . Suponhamos que $\varphi(\text{int}(K)) = \text{int}(\varphi(K))$, com φ inversível em $\text{int}(K)$ e $\det J\varphi \neq 0$ em todo ponto em $\text{int}(K)$. Então, para toda $f : \varphi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ integrável temos,*

$$\iint_{\varphi(K)} f(x, y)dxdy = \iint_K f(\varphi(u, v))|\det J\varphi(u, v)|dudv.$$

(3) Uma Versão Simplificada do Teorema de Mudança de Variáveis

Teorema 19 (P. Lax - 1999). *Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x) = x$ para todo $|x|$ suficientemente grande. Então, para toda f em $C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ e com suporte compacto temos*

$$\iint f(\varphi(u, v)) |(J\varphi)(u, v)| dudv = \iint f(x, y) dx dy,$$

onde $|(J\varphi)(u, v)|$ é o módulo do determinante da matriz $J\varphi(u, v)$.

Prova.

Provaremos tal resultado apenas para funções diferenciáveis. O caso f contínua segue por aproximações. Seja

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^x f(t, y) dt.$$

É claro que $\frac{\partial g}{\partial x} = f$. Seja $c > 0$ tal que $\text{Suporte}(f) \subset Q = [-c, c] \times [-c, c]$ e $\varphi(u, v) = (u, v)$ se $(u, v) \notin Q$. É fácil ver que $g(x, y) = 0$ se $|y| \geq c$ ou $x \leq -c$. Seja $R > 0$ tal que $\varphi(u, v) = (u, v)$ se $|(u, v)| \geq R$. Assumamos $c > R$. Temos,

$$(19.1) \quad \iint f(\varphi(u, v)) |(J\varphi)(u, v)| dudv = \iint_Q \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(u, v)) |(J\varphi)(u, v)| dudv.$$

Escrevamos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ segundo suas funções componentes. Pela regra da cadeia obtemos,

$$J(g \circ \varphi) = [\nabla g]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} \frac{\varphi_1}{\partial u} & \frac{\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\varphi_2}{\partial u} & \frac{\varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \left[\frac{\partial g}{\partial x} \nabla \varphi_1 + \frac{\partial g}{\partial y} \nabla \varphi_2 \right]_{1 \times 2}.$$

Graças a tal equação matricial e as regras usuais para determinantes segue

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(g \circ \varphi)}{\partial u} & \frac{\partial(g \circ \varphi)}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \nabla \varphi_1 + \frac{\partial g}{\partial y} \nabla \varphi_2 \\ \nabla \varphi_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x} \begin{vmatrix} \nabla \varphi_1 \\ \nabla \varphi_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x} \det(J\varphi).$$

Logo, encontramos a identidade

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(u, v)) \det(J\varphi)(u, v) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \partial_u(g \circ \varphi) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \partial_v(g \circ \varphi)$$

Substituindo tal expressão no lado direito de (19.1) obtemos

$$\iint f(\varphi(u, v)) |J\varphi(u, v)| dudv = \iint_Q \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \partial_u (g \circ \varphi) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \partial_v (g \circ \varphi) \right] dudv .$$

Integrando por partes temos, já que $\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\pm c, v) = 1$ e $(g \circ \varphi)(c, v) = g(c, v)$,

$$\begin{aligned} & \int_{-c}^c \left[\int_{-c}^c \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \partial_u (g \circ \varphi) du \right] dv = \\ &= \int_{-c}^c \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) (g \circ \varphi)(u, v) \Big|_{u=-c}^{u=+c} - \int_{-c}^c \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u \partial v}(u, v) (g \circ \varphi)(u, v) du \right] dv \\ &= \int_{-c}^c [g(c, v) - g(-c, v)] dv - \iint_Q \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u \partial v}(u, v) (g \circ \varphi)(u, v) dudv. \end{aligned}$$

A seguir, integrando por partes temos, já que $(g \circ \varphi)(u, \pm c) = g(u, \pm c) = 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{-c}^c \left[\int_{-c}^c \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) \partial_v (g \circ \varphi) dv \right] du = \\ &= \int_{-c}^c \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) (g \circ \varphi)(u, v) \Big|_{v=-c}^{v=+c} - \int_{-c}^c \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial v \partial u}(u, v) (g \circ \varphi)(u, v) dv \right] du \\ &= - \iint_Q \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial v \partial u}(u, v) (g \circ \varphi)(u, v) dudv. \end{aligned}$$

Subtraindo os resultados destas duas integrações por partes encontramos

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \partial_u (g \circ \varphi)(u, v) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) \partial_v (g \circ \varphi)(u, v) \right] dudv = \\ &= \int_{-c}^c [g(c, v) - g(-c, v)] dv + \iint_Q \left[\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial v \partial u}(u, v) - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u \partial v}(u, v) \right] (g \circ \varphi)(u, v) dudv. \end{aligned}$$

Entretanto, pelo Lema de Schwarz as derivadas mistas comutam. Logo,

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \partial_u (g \circ \varphi) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \partial_v (g \circ \varphi) \right] dudv = \int_{-c}^c [g(c, v) - g(-c, v)] dv = \\ &= \int_{-c}^c \left[\int_{-\infty}^c f(t, v) dt - \int_{-\infty}^{-c} f(t, v) dt \right] dv = \\ &= \int_{-c}^c \int_{-c}^c f(t, v) dt dv = \iint f(x, y) dx dy \blacksquare \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*, second edition, John Wiley & Sons, 1976
3. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 1 e 2, 5 ed., Ed. LTC, 2002.
4. Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.
5. Lax, P. D., *Change of Variables in Multiple Integrals*, Amer. Math. Monthly, pp. 497-501, 1999.
6. Lax, P. D., *Change of Variables in Multiple Integrals II*, Amer. Math. Monthly, pp. 115-119, 2001.
7. Lima, E., *Curso de Análise*, Vol 2., IMPA, 2009.
8. Simmons, G. F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 2, McGraw-Hill, 1988.
9. Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.