

MAT 211 - CÁLCULO III - IME-USP

1 SEMESTRE de 2012

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> oliveira@ime.usp.br

QUATRO TEOREMAS DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Nesta apresentação utilizaremos o teorema abaixo.

Teorema do Valor Médio. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω um aberto em \mathbb{R}^2 , uma função diferenciável. Consideremos dois pontos P e Q , ambos em Ω , tais que o segmento que os une, \overline{PQ} , está contido em Ω . Então, existe um ponto $\bar{P} \in \overline{PQ}$ tal que

$$f(Q) - f(P) = \vec{\nabla} f(\bar{P}) \cdot (Q - P).$$

É claro que há um resultado análogo ao acima se Ω é um aberto de \mathbb{R}^3 .

O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Motivação. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Objetivamos encontrar condições em que dada a equação $f(x, y) = 0$ podemos explicitar y como função da variável x , x em algum intervalo aberto. Isto é, determinarmos uma função $y = g(x)$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ para todo ponto $x \in \text{Dom}(g) = (a, b) \subset \mathbb{R}$, onde $a \neq b$. Ainda mais, assegurada a existência de uma tal função g desejamos identificar sob quais hipóteses podemos concluir, para g , sua unicidade ou continuidade ou diferenciabilidade.

Definição. Uma função $y = g(x)$ se diz definida (dada) implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$ se $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in \text{Dom}(g)$. Diz-se também que $y = g(x)$ é solução implícita da equação $f(x, y) = 0$. Analogamente definimos soluções implícitas $x = h(y)$.

Notação. Para diferenciar ponto de vetor, por vezes indicamos um vetor $\vec{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ por $\overrightarrow{v} = \langle a, b \rangle$.

Exemplo 1. A análise da equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$, neste caso $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, é elucidativa. A equação $x^2 + y^2 = 1$ define a circunferência no plano, de raio 1 e centrada na origem, usualmente indicada por S^1 .

Claramente, as funções $g_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$, onde $x \in (-1, +1)$, e $g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$, onde $x \in (-1, +1)$, são soluções implícitas da equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Os gráficos de g_1 e g_2 são, respectivamente, o “hemisfério” superior

$$H^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\},$$

e o “hemisfério” inferior

$$H^- = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\},$$

de S^1 , subtraídos de ambos os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

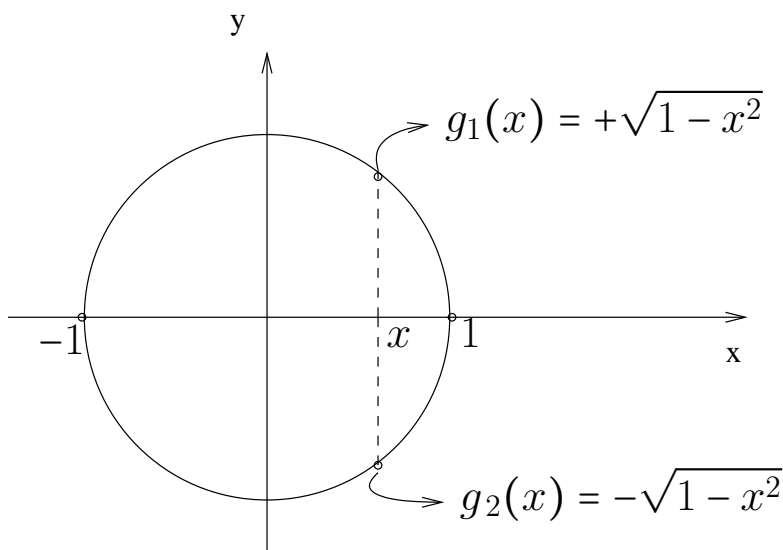


Figura 1: Soluções implícitas da equação $x^2 + y^2 = 1$, se $x \in (-1, +1)$

Se $(x_0, y_0) \in H^+$ e $y_0 > 0$, então a função $g_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$ com $x \in (-1, +1)$ é, entre as soluções da equação $x^2 + y^2 = 1$, uma solução tal que $g_1(x_0) = y_0$. Analogamente, se $(x_0, y_0) \in H^-$ e $y_0 < 0$, então a função $g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ onde $x \in (-1, 1)$, é solução de $f(x, y) = 0$ tal que $g_2(x_0) = y_0$. Vide Figura 1.

Logo, se $(x_0, y_0) \in S^1$ é tal que $y_0 < 0$ ou $y_0 > 0$ determinamos uma função $y = g(x)$ definida em um intervalo I , aberto e contendo x_0 , tal que

$$\begin{cases} f(x, g(x)) = 0, \text{ para todo } x \in I, \text{ onde } x_0 \in I, \\ g(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Neste caso temos $I = (-1, 1)$. Porém, todo intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$, contido em $(-1, 1)$ serve.

Se $(x_0, y_0) = (1, 0) \in S^1$, observando o desenho da circunferência, próximo ao ponto $(1, 0)$, é óbvio que não podemos encontrar um intervalo aberto centrado em $x_0 = 1$, $I = (1 - r, 1 + r)$, $r > 0$, e uma função $g : (1 - r, 1 + r) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $x^2 + g(x)^2 = 1$ para todo $x \in (1 - r, 1 + r)$. Neste caso, tal g não existe ainda que descontínua. Vide Figura 2 que segue.

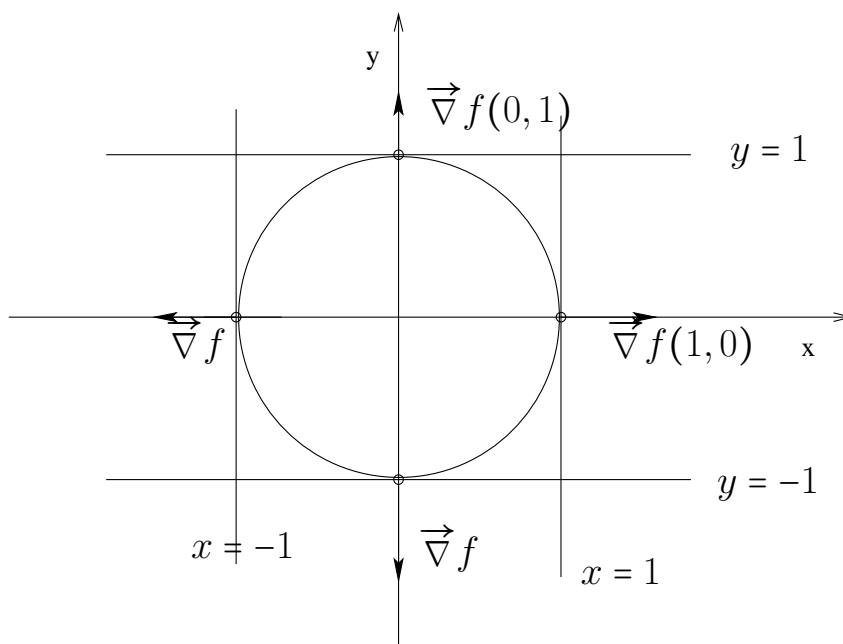


Figura 2: Análise das soluções da equação $x^2 + y^2 = 1$ nos pontos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$

A circunferência S^1 é a curva de nível zero de $f = f(x, y)$, donde o gradiente $\vec{\nabla} f = \langle 2x, 2y \rangle$ é ortogonal ao S^1 em cada ponto.

Atenção. A reta tangente $[T]$ à curva de nível zero, no ponto $(1, 0)$, é “vertical” pois paralela ao eixo Oy [prenúncio de dificuldades para determinarmos $y = g(x)$] e $\vec{\nabla} f(1, 0)$ é paralelo ao eixo x [indicando que neste caso a reta tangente T é paralela a Oy].

Analogamente, se $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ então não existe intervalo I , aberto e contendo $x_0 = -1$, e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $x^2 + g(x)^2 = 1$, $\forall x \in I$, e $g(-1) = 0$. Ainda, a reta tangente à curva de nível zero, no ponto $(-1, 0)$, é paralela ao eixo Oy e o vetor $\vec{\nabla} f(-1, 0)$ é paralelo a Ox (vide Figura 2).

A análise é análoga se procurarmos soluções implícitas da equação

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

da forma $x = h(y)$ tais que $x_0 = h(y_0)$ e $x_0^2 + y_0^2 = 1$ e, neste caso, se $x_0 = 0$, nos pontos $(0, -1)$ e $(0, +1)$ não podemos determinar uma função $x = h(y)$, onde $y \in I$, sendo I um intervalo aberto centrado em $y_0 = -1$ (ou $y_0 = +1$), tal que $h(y)^2 + y^2 = 1$, para todo $y \in I$, e $h(y_0) = 0$ (vide Figura 2).

Atenção. As retas tangentes à curva de nível zero, em $(0, -1)$ e em $(0, +1)$, são “horizontais” pois paralelas ao eixo Ox e $\vec{\nabla} f$ é paralelo ao eixo Oy ■

Mostramos a seguir que se $f \in C^1$ e o vetor gradiente $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ não é paralelo ao eixo Ox [donde segue que a reta tangente, se existir, à curva de nível de f passando pelo ponto (x_0, y_0) não é paralela ao eixo Oy], podemos então determinar uma função $y = g(x)$ definida em um intervalo aberto I contendo o ponto x_0 tal que

$$f(x, g(x)) = 0, \forall x \in I, \text{ e } g(x_0) = y_0.$$

Teorema 1. Seja $f = f(x, y) \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, com Ω um aberto não vazio em \mathbb{R}^2 , e $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto em Ω tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Nestas condições, se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então existem intervalos abertos I e J , contidos em \mathbb{R} , com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, satisfazendo:

- Para cada $x \in I$ existe um único $y = g(x) \in J$, tal que $f(x, g(x)) = 0$.
- A função $g : I \rightarrow J$ é diferenciável, de classe C^1 , e

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Previamente à prova deste teorema é útil uma série de **observações**:

- (1) O nome do teorema evidentemente se deve ao fato de podermos, teóricamente, determinar localmente a variável y em função da variável x .
- (2) Como estamos interessados em resolver $f(x, y) = 0$ localmente, podemos supor que Ω é uma bola aberta (ou retângulo aberto) centrada em (x_0, y_0) suficientemente pequena tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in \Omega$; e portanto, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ não troca de sinal em Ω . Suponhamos então, sem perda de generalidade, $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ em um tal domínio Ω .
- (3) Retângulos e bolas são conjuntos convexos [um conjunto é **convexo** se contém todo segmento unindo dois pontos quaisquer do conjunto].
- (4) A unicidade da função $g(x)$ é trivial. De fato, se $f(x, y_1) = f(x, y_2)$, com (x, y_1) e (x, y_2) em Ω , $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ e Ω convexo, é fácil ver que $y_1 = y_2$.
- (5) Pela observação (4), se $g : \text{Dom}(g) \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \text{Dom}(h) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem

$$f(x, g(x)) = f(x, h(x)), \text{ com } x \in \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h),$$

então temos $g(x) = h(x)$, para todo $x \in \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h)$. Isto é, vale a identidade $g \equiv h$ na intersecção de domínios $\text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h)$.

- (6) Pela observação (5) [e com a notação no enunciado do Teorema 1] segue que para concluirmos a diferenciabilidade de g sobre todo o intervalo I é suficiente provarmos a **Afirmção**:

“para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe uma função $g : I \rightarrow J$ satisfazendo as seguintes condições: $f(x, g(x)) = 0, y_0 = g(x_0)$ e g derivável em x_0 .”

Verificação. De fato, dado x_1 arbitrário no intervalo aberto I , pela **Afirmção** sabemos que existe uma função h definida em um intervalo aberto I_1 centrado em x_1 tal que $f(x, h(x)) = 0, \forall x \in I_1$, com h derivável em x_1 . Entretanto, como $x_1 \in I \cap I_1$, o qual é um intervalo aberto, e $g \equiv h$ em $I \cap I_1$, concluimos que g é derivável em $x_1, \forall x_1 \in I$.

- (7) Tendo provado que g é diferenciável, a fórmula apresentada para a derivada de g segue diretamente da regra da cadeia aplicada ao cômputo:

$$0 = \frac{d(0)}{dx} = \frac{d}{dx}\{f(x, g(x))\} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) .$$

- (8) Utilizando a notação apresentada no enunciado do teorema, temos que a curva $\gamma : I \rightarrow I \times J \subset \Omega$, $\gamma(x) = (x, g(x))$, é tal que

$$f(\gamma(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Logo, γ é uma curva de nível zero de f , satisfazendo ainda as três seguintes condições:

- (i) γ é diferenciável.
- (ii) $\gamma'(x) = \langle 1, g'(x) \rangle \neq \vec{0}$, $\forall x \in I$.
- (iii) $\vec{\nabla} f(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x) = 0$, $\forall x \in I$, donde $\vec{\nabla} f(\gamma(x)) \perp \gamma'(x)$, $\forall x \in I$.

Dizemos que γ é uma parametrização local, passando pelo ponto (x_0, y_0) , da curva L de nível zero de $f = f(x, y)$. Por meio de uma translação podemos supor a curva γ definida em um intervalo aberto $I = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, tal que $\gamma(t) \in L$ e $f(\gamma(t)) = 0$ se $t \in I = (-\delta, \delta)$, e ainda mais, $\gamma(0) = P_0$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$. Tal formulação serve tanto no caso $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ como no caso $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

- (9) Com as notações e a simplificação do item (8), por (8)(iii) segue que o vetor gradiente $\vec{\nabla} f(\gamma(t))$ é ortogonal à curva γ e assim ao gráfico de g . Logo, o vetor $\vec{\nabla} f(\gamma(0))$ é normal ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0) .
- (10) Tendo provado que a função g é diferenciável e a fórmula para a derivada de g , como as derivadas parciais de f são contínuas, concluímos que a função g' é também contínua. Consequentemente, $g \in C^1$.

Demonstração do Teorema.

Existência.

Sendo $f \in C^1$, temos que existe uma bola $B = B((x_0, y_0); \delta)$, $\delta > 0$, tal que $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ em B . Sejam y_1 e y_2 tais que $y_1 < y_0 < y_2$, com $(x_0, y_1) \in B$ e $(x_0, y_2) \in B$. Seja $J = [y_1, y_2]$ contido no eixo das ordenadas (v. Figura 3).

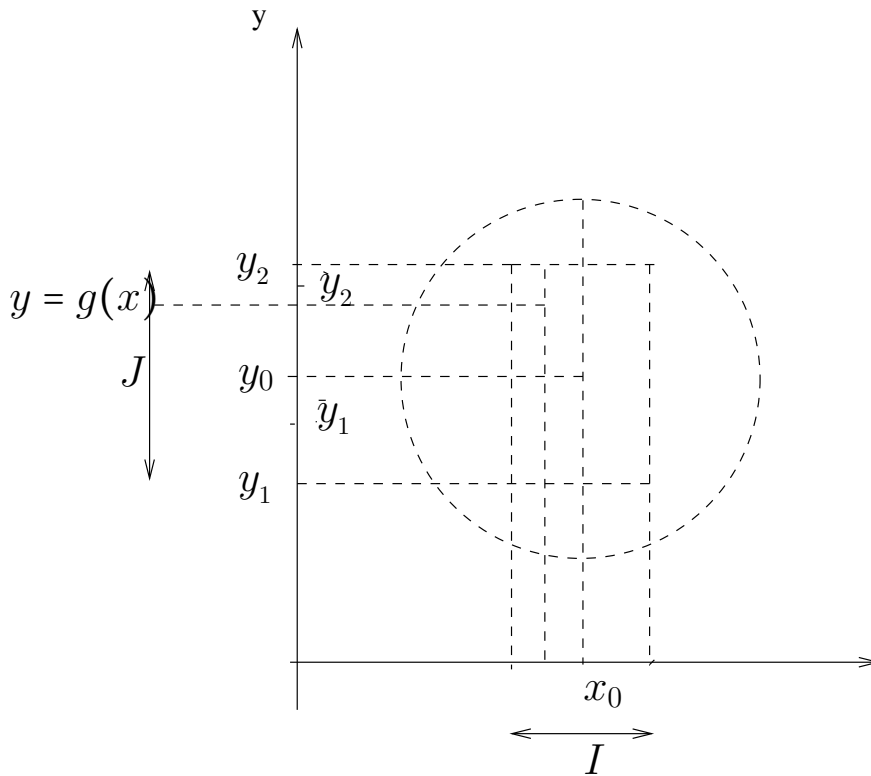


Figura 3: Teorema 1 das Funções Implícitas

Considerando a função $[y_1, y_2] \ni y \mapsto f(x_0, y)$ temos que esta é estritamente crescente e $f(x_0, y_0) = 0$. Logo, $f(x_0, y_1) < 0$ e $f(x_0, y_2) > 0$. Conseqüentemente, pela continuidade da função f , existe um intervalo aberto I , contendo x_0 , tal que $\forall x \in I$ temos $f(x, y_1) < 0$ e $f(x, y_2) > 0$. Portanto, fixado $x \in I$, a função $[y_1, y_2] \ni y \mapsto f(x, y)$ é tal que $f(x, y_1) < 0$ e $f(x, y_2) > 0$. Donde, pelo Teorema do Valor Intermediário segue que existe um único y , onde $y = g(x) \in (y_1, y_2)$, tal que $f(x, g(x)) = 0$. Observemos que o retângulo $I \times J$ está contido na bola B .

Continuidade no ponto x_0 .

Sejam y_1 e y_2 como acima e sejam \bar{y}_1 e \bar{y}_2 tais que $y_1 < \bar{y}_1 < y_0 < \bar{y}_2 < y_2$. Procedendo como acima encontramos um intervalo aberto I_1 centrado em x_0 e contido em I , tal que:

$$\text{se } x \in I_1 \text{ então } g(x) \in (\bar{y}_1, \bar{y}_2).$$

Logo, g é contínua no ponto x_0 .

Diferenciabilidade no ponto x_0 .

Suponhamos $\Delta x \neq 0$ e pequeno o suficiente tal que $x_0 + \Delta x \in I$. Consideremos os pontos $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, g(x_0))$ e $P = (x_0 + \Delta x, g(x_0 + \Delta x))$, ambos no convexo $I \times J \subset B$. Aplicando o Teorema do Valor Médio à função f restrita ao segmento $\overline{P_0P}$ vemos que existe um ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \overline{P_0P}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= f((x_0 + \Delta x, g(x_0 + \Delta x))) - f(x_0, g(x_0)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})[g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)]. \end{aligned}$$

Donde, como as derivadas parciais f_x e f_y são contínuas, com $f_y \neq 0$ em B , e a função g é contínua em x_0 e, ainda, $(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} P_0 = (x_0, y_0)$, segue que

$$\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \blacksquare$$

Exemplo 2. Determine pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que em um intervalo em torno de x_0 existe solução implícita $y = y(x)$ da equação $y^3 + 3xy + x^3 = 4$. Compute então $y'(x_0)$.

Resolução. Seja $f(x, y) = y^3 + 3xy + x^3 - 4$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Se $f(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 3y_0^2 + 3x_0 = 3(y_0^2 + x_0) \neq 0$, pelo Teorema 1 existe $y = g(x)$, definida em um intervalo em torno de x_0 , tal que

$$f(x, g(x)) = g(x)^3 + 3xg(x) + x^3 - 4 = 0 \quad \text{e} \quad g(x_0) = y_0.$$

Como f é C^1 , pelo Teorema 1, g é derivável e pelas regras usuais de derivação segue que $3g(x_0)^2g'(x_0) + 3g(x_0) + 3x_0g'(x_0) + 3x_0^2 = 0$. Logo,

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = g'(x_0) = -\frac{g(x_0) + x_0^2}{g(x_0)^2 + x_0} = -\frac{x_0^2 + y_0}{x_0 + y_0^2} \blacksquare$$

Destaquemos que sob as hipóteses do Teorema 1 asseguramos (localmente):

a existência, a unicidade e a diferenciabilidade

da solução $y = g(x)$ do problema

$$f(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad f(x_0, y_0) = 0.$$

Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, nada podemos afirmar sobre ou a existência ou a unicidade ou a diferenciabilidade de uma solução g para o referido problema.

O exemplo abaixo mostra que se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ então não podemos a priori supor a não existência de uma solução diferenciável para o citado problema.

Exemplo 3. Seja $f(x, y) = x^3 - y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $\vec{\nabla} f(0, 0) = \langle 0, 0 \rangle$.
- (b) Dê uma solução implícita e diferenciável $y = g(x)$ de $f(x, y) = 0$ tal que $g(0) = 0$.

Resolução.

- (a) Obviamente, $x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow x = y$ e, a curva de nível zero é a bissetriz principal. É evidente que o gradiente é nulo em $(0, 0)$.
- (b) A função $g(x) = x$ é diferenciável e atende os requisitos ■

O exemplo abaixo, mostra que se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ e $y = g(x)$ é uma solução contínua para $f(x, y) = 0$, por (x_0, y_0) , pode ocorrer que g não é diferenciável.

Exemplo 4. Seja $f(x, y) = x - y^3$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $f_y(0, 0) = 0$.
- (b) Dê uma solução implícita e contínua $y = g(x)$, de $f(x, y) = 0$, tal que $g(0) = 0$.
- (c) Verifique que g não é derivável.

Solução.

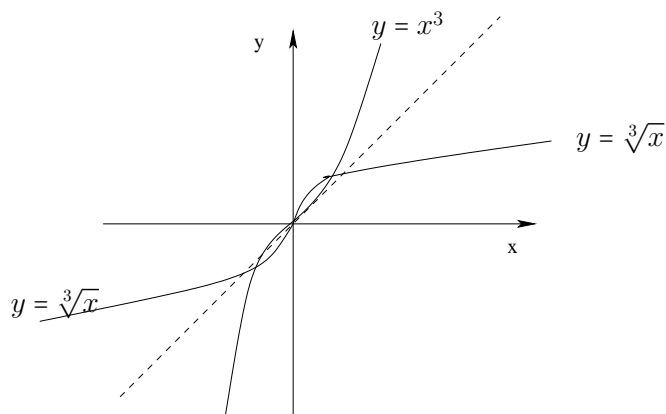


Figura 4: Soluções implícitas da equação $x - y^3 = 0$

- (a) Temos $f(x, y) = 0$ se e somente se $x - y^3 = 0$, isto é, $y = \sqrt[3]{x}$. A curva de nível zero é o gráfico da função raiz cúbica, a qual é a inversa da função cúbica: $y = x^3$, cujo gráfico é elementar. O gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ é

então simétrico ao gráfico de $y = x^3$ em relação à bissetriz principal do plano [esboce-o]. Obviamente, $f_y(x, y) = -3y^2$ e $f_y(0, 0) = 0$.

- (b) e (c) Se $g(x) = \sqrt[3]{x}$, temos que $f(x, g(x)) = x - g(x)^3 = 0$, $g(0) = 0$, g é contínua e, é fácil ver, não existe $\frac{dg}{dx}(0)$ ■

Mostremos agora que se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ então pode ocorrer a não unicidade da solução implícita diferenciável $y = g(x)$ para $f(x, y) = 0$, pelo ponto (x_0, y_0) .

Exemplo 5. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Descreva a curva de nível zero de f e mostre que $\vec{\nabla} f(0, 0) = \langle 0, 0 \rangle$.
 (b) Dê duas soluções implícitas diferenciáveis $y = g(x)$ de $f(x, y) = 0$, pelo ponto $(0, 0)$.

Resolução.

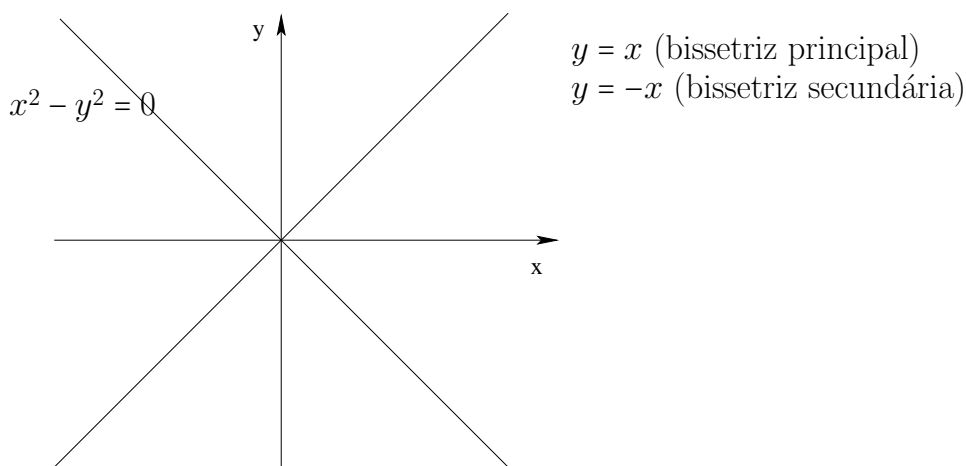


Figura 5: Soluções implícitas da equação $x^2 - y^2 = 0$

- (a) A curva de nível zero é o conjunto $\{(x, \pm x) : x \in \mathbb{R}\}$, união das bissetrizes principal e secundária do plano. É evidente que

$$\vec{\nabla} f(0, 0) = \vec{0} \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) É claro que $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = -x$ são ambas soluções implícitas diferenciáveis pela origem $(0, 0)$ ■

Exemplo 6. Suponhamos que a função $z = g(x, y)$, $(x, y) \in \text{Dom}(g)$, com $\text{Dom}(g)$ um aberto de \mathbb{R}^2 , dada implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$, é diferenciável em $\text{Dom}(g)$, sendo F diferenciável num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \text{Dom}(g).$$

(a) Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}.$$

(b) Observando que o gráfico de g está contido na superfície de nível 0 de F , mostre que o gradiente de F no ponto $P_0 = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de g no ponto P_0 .

Solução.

(a) Pela regra da cadeia, para pontos $(x, y) \in \text{Dom}(g)$ temos as equações,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}[F(x, y, g(x, y))] = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}[F(x, y, g(x, y))] = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), \end{aligned}$$

as quais fornecem, já que $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \neq 0$, as fórmulas em (a).

(b) O plano π , tangente ao gráfico de g no ponto $P_0 = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ tem sua direção dada pelo vetor normal

$$\vec{n}_{P_0} = \langle g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0), -1 \rangle$$

e, devido à hipótese $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$, o plano π tem também a direção

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \vec{n}_{P_0} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \right\rangle.$$

Finalmente, pelo item (a) temos o par de equações,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial F}{\partial x}(P_0) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \quad ,$$

e conseqüentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \vec{n}_{P_0} = \left\langle -\frac{\partial F}{\partial x}(P_0), -\frac{\partial F}{\partial y}(P_0), -\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \right\rangle = -\vec{\nabla} F(P_0) \quad \blacksquare$$

SEGUNDA VERSÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Teorema 2. Sejam $F(x, y, z)$ uma função de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, com $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nestas condições, se $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, então existirão um retângulo aberto $I \times J$ centrado no ponto (x_0, y_0) e um intervalo aberto V , com $z_0 \in V$, tais que para cada $(x, y) \in I \times J$ existe um único número $g(x, y) \in V$ satisfazendo

$$F(x, y, g(x, y)) = 0.$$

A função $z = g(x, y)$, com $(x, y) \in I \times J$, é diferenciável, de classe C^1 , e:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}.$$

Antes de iniciarmos a prova deste teorema façamos duas **observações**:

- (1) Utilizemos as notações F_x , F_y e F_z para $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial z}$, respectivamente.
- (2) Como no Teorema 1, supondo Ω convexo e pequeno o suficiente tal que $F_z > 0$ em Ω , vale a unicidade: $F(x, y, z_1) = F(x, y, z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.

Demonstração do Teorema.

Existência.

Consideremos (v. Figura 6 abaixo) um paralelepípedo (convexo) aberto $I \times J \times (z_1, z_2)$, centrado em (x_0, y_0, z_0) , pequeno o suficiente tal que seu fecho esteja contido em Ω . Visto que temos $F_z > 0$, seguem as desigualdades $F(x_0, y_0, z_1) < 0 = F(x_0, y_0, z_0) < F(x_0, y_0, z_2)$. Assim, devido à continuidade de F , podemos supor, sem perda de generalidade, que I e J são suficientemente pequenos tais que a restrição de F a $I \times J \times \{z_1\}$ é estritamente negativa e a restrição de F a $I \times J \times \{z_2\}$ é estritamente positiva.

Fixando agora $(x, y) \in I \times J$ e considerando a função $\varphi(z) = F(x, y, z)$, com $z \in [z_1, z_2]$, temos que φ é contínua, estritamente crescente (pois tem derivada estritamente positiva), e ainda mais $\varphi(z_1) < 0$ e $\varphi(z_2) > 0$. Logo, existe um único $z = g(x, y) \in (z_1, z_2)$ tal que $\varphi(g(x, y)) = F(x, y, g(x, y)) = 0$. Seja então g assim definida, $g : I \times J \mapsto (z_1, z_2)$.

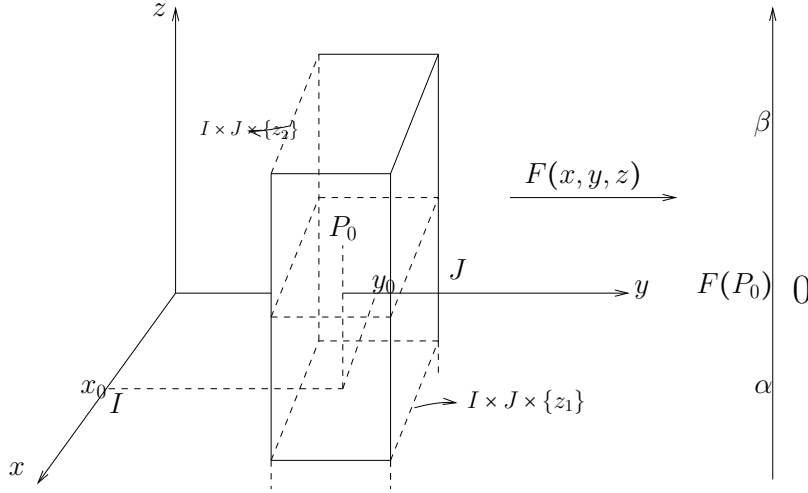


Figura 6: Teorema 2 das Funções Implícitas

Continuidade de g em (x_0, y_0) .

Procedendo como acima temos que para todos \bar{z}_1 e \bar{z}_2 , satisfazendo as desigualdades $z_1 < \bar{z}_1 < z_0 < \bar{z}_2 < z_2$, determinamos um retângulo aberto $I_1 \times I_2$, centrado no ponto (x_0, y_0) , tal que

$$(x, y) \in I_1 \times J_1 \Rightarrow g(x, y) \in (\bar{z}_1, \bar{z}_2).$$

Logo, g é contínua em (x_0, y_0) .

Continuidade de g em seu domínio.

Analogamente à prova do Teorema Fundamental da Função Implícita, e como g é contínua em (x_0, y_0) , é fácil ver que g é contínua em $I_1 \times I_2$.

g é de classe C^1 em seu domínio.

Fixando um arbitrário \bar{y} em I_2 temos

$$F(x, \bar{y}, g(x, \bar{y})) = 0, \text{ para todo } x \in I_1.$$

Definindo então a função

$$\mathcal{F}(x, z) = F(x, \bar{y}, z), \text{ onde } (x, z) \in I_1 \times (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

obtemos

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, g(x, \bar{y})) = F(x, \bar{y}, g(x, \bar{y})) = 0, & \text{para todo } x \in I_1, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}(x, z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x, \bar{y}, z) \neq 0, & \text{para todo } (x, z) \in I_1 \times (\bar{z}_1, \bar{z}_2). \end{cases}$$

Aplicando o Teorema Fundamental das Funções Implícitas à função \mathcal{F} vemos que a função $x \mapsto g(x, \bar{y})$ é derivável em todo ponto $x \in I_1$ e

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \bar{y}) = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x, g(x, \bar{y}))}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}(x, g(x, \bar{y}))} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x, \bar{y}, g(x, \bar{y}))}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}(x, \bar{y}, g(x, \bar{y}))}.$$

Então, como \bar{y} é arbitrário em I_2 , segue que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ é contínua em $I_1 \times I_2$. Analogamente, $\frac{\partial g}{\partial y}$ também. Portanto, g é de classe C^1 .

Exemplo 7. Ache pontos $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tais que a equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$$

tenha soluções implícitas diferenciáveis $z = z(x, y)$ em uma bola aberta contendo (x_0, y_0) e tais que $z(x_0, y_0) = z_0$. Compute $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Resolução.

Consideremos a superfície de nível zero de

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z.$$

Temos,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 1$$

e $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, se ocorre $z_0 \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Então, pelo Teorema 2, se o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertence à superfície $F^{-1}(0)$ e ainda $z_0 \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, segue que existe uma função $z = z(x, y)$ como desejada.

Ainda mais, derivando parcialmente a equação

$$x^3 + y^3 + z^3(x, y) - x - y - z(x, y) = 0,$$

obtemos

$$3x^2 + 3z^2(x, y)z_x - 1 - z_x = 0 \quad , \quad 3y^2 + 3z^2(x, y)z_y - 1 - z_y = 0 .$$

Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{1 - 3x^2}{3z^2(x, y) - 1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{1 - 3y^2}{3z^2(x, y) - 1} \quad \blacksquare$$

Exemplo 8. Se $y = y(x)$ e $z = z(x)$, $x \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, são soluções implícitas de

$$(S1) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

com F e G diferenciáveis num aberto de \mathbb{R}^3 , compute as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ (em função das derivadas parciais de F e G).

Resolução.

Por hipótese temos,

$$(S2) \quad F(x, y(x), z(x)) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y(x), z(x)) = 0,$$

e portanto a curva $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$, $x \in I = (a, b)$, está contida na intersecção das superfícies de nível zero de F e de G : $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$.

Obtemos $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ derivando as equações em (S2) em relação à variável x :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}, \end{cases}$$

cuja solução é dada pela Regra de Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}},$$

para todo $x \in (a, b)$ tal que $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$ no ponto $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$.

Notação. O determinante jacobiano de F e G em relação a y e a z , nesta ordem, é:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

De forma análoga indicamos os determinantes jacobianos de F e G em relação a x e z (nesta ordem) e em relação a y e x (nesta ordem). Com tais notações temos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

Exemplo 9. Seja $g(u, v) = f(x, y)$, com $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente:

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases} .$$

Suponha $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

- (a) Mostre que $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{x} \frac{\partial x}{\partial u}$.
- (b) Compute $\frac{\partial g}{\partial u}$.
- (c) Mostre que f é constante sobre as hipérbolas $xy = c$.

Resolução.

- (a) Temos $v = x(u, v) \cdot y(u, v)$, $\forall (u, v)$. Portanto, derivando tal equação em relação a u temos,

$$0 = y \frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u} ,$$

donde segue (a).

- (b) Pela regra da cadeia temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} \left(-\frac{y}{x} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{x} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial u} . \end{aligned}$$

Então, como $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, segue que $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$.

- (c) Seja $c \in \mathbb{R}$ fixado e $\gamma(x) = \left(x, \frac{c}{x} \right)$, $x \neq 0$, uma parametrização da hipérbole $xy = c$. Seja ainda, $\varphi(x) = f\left(x, \frac{c}{x}\right)$ a restrição de f sobre a hipérbole. Então, utilizando que $xy = c$ na segunda igualdade abaixo,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x} \left(x, \frac{c}{x} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(x, \frac{c}{x} \right) \cdot \left(\frac{-c}{x^2} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \left(x, y \right) - \frac{xy}{x^2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(x, y \right) \\ &= \frac{1}{x} \left[x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} \right] \left(x, y \right) = 0 . \end{aligned}$$

Portanto, f é constante sobre as hipérbolas $xy = c$ ■

Exemplo 10. Seja $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente pelo sistema

$$(S) \quad \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy . \end{cases}$$

- (a) Compute $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$ em termos de x e y .
 (b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ soluções implícitas de (S).

Resolução.

- (a) Derivando as duas equações de (S) em relação à variável u obtemos,

$$\begin{cases} 1 = 2x \frac{\partial x}{\partial u} + 2y \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = y \frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u} . \end{cases}$$

Neste último sistema, multiplicando a primeira equação por x , a 2 por $-2y$ e então somando-as obtemos x_u . Analogamente, multiplicando a 1 equação por $-y$, a segunda por $2x$ e somando-as obtemos y_u . Assim,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(x^2 - y^2)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{2(x^2 - y^2)} .$$

- (b) Do sistema (S) temos,

$$\begin{cases} (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = u + 2v \\ (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = u - 2v , \end{cases}$$

e pela escolha de sinais abaixo ao extrairmos as raízes quadradas no sistema acima,

$$x + y = +\sqrt{u + 2v} \quad , \quad x - y = -\sqrt{u - 2v} .$$

Donde,

$$\begin{cases} x = x(u, v) = \frac{\sqrt{u+2v} - \sqrt{u-2v}}{2} \\ y = y(u, v) = \frac{\sqrt{u+2v} + \sqrt{u-2v}}{2} \quad \blacksquare \end{cases}$$

No teorema abaixo utilizamos a notação introduzida no Exemplo 7 para o determinante jacobiano de duas funções em relação a duas de suas variáveis.

TERCEIRA VERSÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Exemplo 11. Consideremos o sistema linear nas variáveis x , y e z ,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0. \end{cases}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

podemos determinar as variáveis y e z em função de x . De fato, escrevendo

$$\begin{cases} 2y + 3z = -x \\ 5y + 6z = -4x \end{cases}$$

obtemos

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -x & 3 \\ -4x & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = -2x \quad \text{e} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -x \\ 5 & -4x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = x.$$

Teorema 3. Consideremos $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z)$, ambas de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, com

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{e} \quad G(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Nestas condições, se $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{\nabla} G(x_0, y_0, z_0)$ são L.I. com

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

então existem um intervalo aberto I , contendo x_0 , e também um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ de classe C^1 em I , tais que

$$F(x, y(x), z(x)) = G(x, y(x), z(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Além disso, temos $y_0 = y(x_0)$ e $z_0 = z(x_0)$. Tem-se ainda:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}};$$

sendo os determinantes jacobianos calculados em $(x, y(x), z(x))$, com $x \in I$.

Demonstração.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$ é não nulo em Ω . Suponhamos ainda, também sem perda de generalidade, a desigualdade $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pelo Teorema 2 a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente uma função $z = g(x, y)$, $(x, y) \in V$, sendo g de classe C^1 em uma bola aberta V , com V centrada em (x_0, y_0) e $z_0 = g(x_0, y_0)$. Analisemos, agora, a função $H(x, y) = G(x, y, g(x, y))$, $(x, y) \in V$. É fácil ver que a função H é de classe C^1 , com $H(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. De fato, lembrando que o Teorema 2 estabelece $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, obtemos então

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) + \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \\ &= \frac{\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x_0, y_0, z_0) \\ &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Como já sabemos, a equação $H(x, y) = 0$, ou $G(x, y, g(x, y)) = 0$, define implicitamente uma função $y = y(x)$, com $x \in I$, de classe C^1 no intervalo I e $y_0 = y(x_0)$. Assim sendo, para completarmos a prova deste teorema definamos a função, obviamente de classe C^1 , $z(x) = g(x, y(x))$, onde $x \in I$, e passemos à verificação das propriedades requeridas. É claro que

$$G(x, y(x), z(x)) = 0, \quad F(x, y(x), z(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0 \text{ e } z(x_0) = g(x_0, y_0) = z_0.$$

Para determinarmos as fórmulas para as derivadas das funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$, derivemos em relação a x o par de equações

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0. \end{cases}$$

Obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}. \end{cases}$$

Donde, pela regra de Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \text{ e } \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \blacksquare$$

QUARTA VERSÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Consideremos três funções F , G e H em $C^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$ e um ponto $P_0 = (w_0, x_0, y_0, z_0)$ em \mathbb{R}^4 tais que

$$\begin{cases} F(w_0, x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(w_0, x_0, y_0, z_0) = 0 \\ H(w_0, x_0, y_0, z_0) = 0, \end{cases}$$

e a função

$$\Phi(w, x, y, z) = (F(w, x, y, z), G(w, x, y, z), H(w, x, y, z)).$$

Mostremos que se os vetores gradiente $\nabla F(w_0, x_0, y_0, z_0)$, $\nabla G(w_0, x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla H(w_0, x_0, y_0, z_0)$ forem linearmente independentes então podemos determinar, localmente, três das variáveis w, x, y e z em função da variável restante de tal forma que obtemos uma solução do sistema

$$\begin{cases} F(w, x, y, z) = 0 \\ G(w, x, y, z) = 0 \\ H(w, x, y, z) = 0, \end{cases} \text{ satisfazendo } \begin{cases} F(w_0, x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(w_0, x_0, y_0, z_0) = 0 \\ H(w_0, x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

Notemos que a matriz jacobiana de Φ no ponto P_0 é

$$J\Phi(P_0) = \begin{bmatrix} F_w(P_0) & F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_w(P_0) & G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \\ H_w(P_0) & H_x(P_0) & H_y(P_0) & H_z(P_0) \end{bmatrix}.$$

Como as três linhas de $J\Phi(P_0)$ são linearmente independentes, temos (teorema do posto) que tal matriz possui três colunas L.I. Suponhamos, sem perda de generalidade, que as três últimas colunas são L.I. Assim,

$$\begin{vmatrix} F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \\ H_x(P_0) & H_y(P_0) & H_z(P_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

É fácil ver que é não nulo ao menos um dos três possíveis determinantes (menores) 2×2 extraídos das duas primeiras linhas do determinante 3×3 acima (basta desenvolver o determinante 3×3 acima pela terceira linha). Suponhamos então, sem perda de generalidade,

$$\begin{vmatrix} F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_y(P_0) & G_z(P_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

É óbvio que a primeira linha do determinante 2×2 acima não é nula. Suponhamos então, sem perda de generalidade,

$$F_z(P_0) \neq 0.$$

Teorema 4. Sob as notações e hipóteses acima temos que existem três funções $x(w)$, $y(w)$ e $z(w)$, definidas num intervalo aberto I centrado em w_0 , tais que $x(w_0) = x_0, y(w_0) = y_0, z(w_0) = z_0$ e ainda, para todo $w \in I$,

$$\begin{cases} F(w, x(w), y(w), z(w)) = 0, \\ G(w, x(w), y(w), z(w)) = 0, \\ H(w, x(w), y(w), z(w)) = 0. \end{cases}$$

Prova.

- Como $F_z(w_0, x_0, y_0, z_0) \neq 0$, analogamente aos primeiro e segundo teoremas da função implícita vemos que existe uma função $f(w, x, y)$ definida numa vizinhança de (w_0, x_0, y_0) e tal que $f(w_0, x_0, y_0) = z_0$ e

$$F[w, x, y, f(w, x, y)] = 0.$$

Também temos que

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{e} \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

- Substituindo f na segunda equação do sistema dado, consideramos a função em três variáveis (e de classe C^1)

$$\mathcal{G}(w, x, y) = G[w, x, y, f(w, x, y)].$$

No ponto (w_0, x_0, y_0) temos,

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = G_y + G_z f_y = \frac{F_z G_y - F_y G_z}{F_z} = - \frac{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}{F_z} \neq 0.$$

Pelo segundo teorema das funções implícitas, existe uma função $g(w, x)$ numa vizinhança de (w_0, x_0) tal que $\mathcal{G}[w, x, g(w, x)] = 0$, $g(w_0, x_0) = y_0$ e

$$G[w, x, g(w, x), f(w, x, g(w, x))] = 0.$$

Observação. Utilizando ordenadamente as identidades $\mathcal{G}[w, x, g(w, x)] = 0$ e $\mathcal{G}(w, x, y) = G[w, x, y, f(w, x, y)]$, obtemos

$$g_x = - \frac{\mathcal{G}_x}{\mathcal{G}_y} = - \frac{G_x + G_z f_x}{G_y + G_z f_y} = - \frac{F_z G_x - F_x G_z}{F_z G_y - F_y G_z}$$

- Substituindo as funções $y = g(w, x)$ e $z = f(w, x, g(w, x))$ na terceira equação do sistema dado obtemos a função de classe C^1

$$\mathcal{H}(w, x) = H[w, x, g(w, x), f(w, x, g(w, x))].$$

Mostremos que $\mathcal{H}_x(w_0, x_0) \neq 0$. Temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= H_x + H_y g_x + H_z [f_x + f_y g_x] \\ &= H_x - H_y \left(\frac{F_z G_x - F_x G_z}{F_z G_y - F_y G_z} \right) + H_z \left[- \frac{F_x}{F_z} + \frac{F_y}{F_z} \left(\frac{F_z G_x - F_x G_z}{F_z G_y - F_y G_z} \right) \right] \\ &= \frac{H_x (F_z G_y - F_y G_z) - H_y (F_z G_x - F_x G_z) + H_z (F_y G_x - F_x G_y)}{F_z G_y - F_y G_z} \end{aligned}$$

$$= - \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}}{F_z G_y - F_y G_z} \neq 0.$$

Logo, existe uma função $x = x(w)$ definida numa vizinhança de w_0 tal que

$$\mathcal{H}(w, x(w)) = 0 \text{ e } x(w_0) = x_0$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{cases} H[w, x(w), g(w, x(w)), f(w, x(w), g(w, x(w)))] = 0, \\ G[w, x(w), g(w, x(w)), f(w, x(w), g(w, x(w)))] = 0, \\ F[w, x(w), g(w, x(w)), f(w, x(w), g(w, x(w)))] = 0 \blacksquare \end{cases}$$

REFERÊNCIAS

1. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 2, 5 ed., Editora LTC.
2. Lima, Elon, *Curso de Análise*, Vol 2, 11 ed., IMPA.
3. Simmons, G., *Cálculo Com Geometria Analítica*, Vol 2, 1 ed., Makron Books.