MAT 211 - CÁLCULO III - IME

Primeiro semestre de 2012

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

DIFERENCIABILIDADE, REGRA DA CADEIA E TEOREMAS DA FUNÇÃO INVERSA E DA FUNÇÃO IMPLÍCITA (NESTA ORDEM)

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Sejam n e m dois números naturais.

Lema 1. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to R^m$ uma aplicação linear. Então,*

(a) *Existe uma constante C tal que $\|T(\overrightarrow{v})\| \leq C\|\overrightarrow{v}\|$, para todo $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$.*

(b) *T é contínua.*

Prova.

(a) Seja $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ a base canônica ordenada de $\mathbb{R}^n$. Consideremos

$$\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + v_n\overrightarrow{e_n}\,, \text{ com } v_1, \ldots, v_n \text{ em } \mathbb{R}\,,$$

um vetor arbitrário em $\mathbb{R}^n$. Assim,

$$T(\overrightarrow{v}) = v_1T(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + v_nT(\overrightarrow{e_n}).$$

Seja $M = \max\big\{\|T(\overrightarrow{e_1})\|, \ldots, \|T(\overrightarrow{e_n})\|\big\}$. Logo, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\|T(\overrightarrow{v})\| &\leq \|v_1T(\overrightarrow{e_1})\| + \cdots + \|v_nT(\overrightarrow{e_n})\| \\
&= |v_1|\,\|T(\overrightarrow{e_1})\| + \cdots + |v_n|\,\|T(\overrightarrow{e_n})\| \\
&\leq |v_1|M + \cdots + |v_n|M \;\leq\; \|\overrightarrow{v}\|M + \cdots + \|\overrightarrow{v}\|M \\
&= nM\|\overrightarrow{v}\|.
\end{aligned}$$

(b) Fixado um ponto x em $\mathbb{R}^n$ e considerando um vetor $\overrightarrow{h}$ em $\mathbb{R}^n$ temos que

$$0 \leq \|T(x + \overrightarrow{h}) - T(x)\| \;=\; \|T(x) + T(\overrightarrow{h}) - T(x)\| \;=\; \|T(\overrightarrow{h})\| \;\leq\; nM\|\overrightarrow{h}\|.$$

Logo,

$$\lim_{\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}} T(x + \overrightarrow{h}) \;= T(x)\,.$$

Portanto, T é contínua em x, para todo x em $\mathbb{R}^n$. Logo, T é contínua ∎

Definição. *Uma função $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com Ω um aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$, é* diferenciável *em um ponto x em Ω se existem:*

- *uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^m$ [escrevemos $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$], dependendo do ponto x, e*
- *uma função E [indicando um "erro"] definida em alguma bola aberta $B(0;r)$, com $r > 0$, centrada na origem 0 de $\mathbb{R}^n$, tais que para h em $B(0;r)$ temos*

$$\begin{cases} F(x+h) = F(x) + T(h) + E(h)\,, \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{E(h)}{|h|} = 0 \end{cases}$$

Notação. A aplicação T é chamada de diferencial de F no ponto x e é indicada

$$T = DF(x).$$

Para simplificar a apresentação, consideremos agora

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em x no $\mathbb{R}^n$ e $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciável em $y = F(x)$.

Então, por definição, podemos escrever

$$\begin{cases} F(x+h) = F(x) + T(h) + E_1(h)\,,\ \text{para todo } h \text{ em } \mathbb{R}^n\,, \\ \text{com } T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear e } E_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ tal que} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{E_1(h)}{|h|} = 0\,, \end{cases}$$

e, analogamente,

$$\begin{cases} G(y+k) = G(y) + S(k) + E_2(k)\,,\ \text{para todo } k \text{ em } \mathbb{R}^m\,, \\ \text{com } S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \text{ linear}\,,\ \text{e } E_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \text{ tal que} \\ \lim\limits_{k\to 0} \frac{E_2(k)}{|k|} = 0. \end{cases}$$

Destaquemos as triviais identidades

$$T(0) = 0,\ S(0) = 0,\ E_1(0) = 0,\ E_2(0) = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} E_1(h) = \lim_{h\to 0} \frac{E_1(h)}{|h|}|h| = 0.0 = E_1(0) \text{ e, analogamente, } \lim_{k\to 0} E_2(k) = 0 = E_2(0).$$

Teorema 2. *A função* $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *é diferenciável no ponto* x *e,*

$$D(G \circ F)(x) = S \circ T = DG(F(x)) \circ DF(x).$$

Prova.

Temos, pela notação acima,

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(x+h) &= G[F(x+h)] \\
&= G[F(x) + T(h) + E_1(h)] \\
&= G[F(x)] \; + \; S[T(h) + E_1(h)] \; + \; E_2[T(h) + E_1(h)] \\
&= (G \circ F)(x) \; + \; (S \circ T)(h) \; + \; \big\{ S[E_1(h)] \; + \; E_2[T(h) + E_1(h)] \big\}.
\end{aligned}$$

Então, como a composta $(S \circ T) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é linear, só nos resta mostrar que

$$\frac{S[E_1(h)] \; + \; E_2[T(h) + E_1(h)]}{|h|} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Porém, S é linear e toda aplicação linear é contínua e se anula na origem. Assim, como por hipótese temos $\lim\limits_{h \to 0} \frac{E_1(h)}{|h|} = 0$, segue que

$$\frac{S[E_1(h)]}{|h|} = S\left[\frac{E_1(h)}{|h|}\right] \xrightarrow{h \to 0} S(0) = 0.$$

Por outro lado, para $h \neq 0$ vale a igualdade

$$\frac{E_2[T(h) + E_1(h)]}{|h|} = \frac{|T(h) + E_1(h)|}{|h|} R(h), \quad R(h) = \begin{cases} 0, \text{ se } T(h) + E_1(h) = 0 \\ \\ \frac{E_2[T(h)+E_1(h)]}{|T(h)+E_1(h)|}, \text{ caso contrário }. \end{cases}$$

Então, como $T(h) + E_1(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$ e $\frac{E_2(k)}{|k|} \xrightarrow{k \to 0} 0$, segue que

$$R(h) \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Por fim, para $h \neq 0$, a desigualdade triangular nos fornece

$$\frac{|T(h) + E_1(h)|}{|h|} \leq \left|\frac{T(h)}{|h|}\right| + \left|\frac{E_1(h)}{|h|}\right|,$$

sendo que, com a notação do Lema 1,

$$\frac{E_1(h)}{|h|} \xrightarrow{h \to 0} 0 \quad \text{e} \quad \left|\frac{T(h)}{|h|}\right| = \frac{C|h|}{|h|} = C, \quad \text{com } C \text{ uma constante.}$$

Logo, $\frac{|T(h)+E_1(h)|}{|h|}$ é limitado se $|h|$ é pequeno o suficiente e, pelo T. do Confronto,

$$\frac{E_2[T(h) + E_1(h)]}{|h|} = \frac{|T(h) + E_1(h)|}{|h|} R(h) \xrightarrow{h \to 0} 0 \blacksquare$$

Proposição 3. *Seja $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável no ponto p em Ω, onde Ω é um aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$. Então, F é contínua em p.*

Prova.

Pela definição de diferenciabilidade, segue que existem uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um raio $r > 0$ tais que

$$\begin{cases} F(p+h) = F(p) + T(h) + E(h)\,, \ \forall h \in B(0;r), \\ \\ \lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{|h|} = 0\,. \end{cases}$$

Logo, pelas hipóteses e pela continuidade da aplicação linear T,

$$\lim_{h\to 0}[F(p+h)-F(p)] = \lim_{h\to 0}[T(h)+E(h)] = \lim_{h\to 0}\left[T(h) + \frac{E(h)}{|h|}|h|\right] = T(0)+0 = 0+0 = 0 \blacksquare$$

A MATRIZ JACOBIANA

Consideremos uma função $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com Ω um aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$, diferenciável em p pertencente a Ω. Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação linear tal que

$$\begin{cases} F(p+h) = F(p) + T(h) + E(h)\,, \ \forall h \in B(0;r) \subset \Omega \text{ com r fixo e } r > 0, \\ \lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{|h|} = 0\,. \end{cases}$$

Proposição 4. *Com as hipótese acima, existem as derivadas parciais*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{e_j}}(p), \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}\,, \quad e \quad T(\overrightarrow{e_j}) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(p).$$

Prova.

Fixemos j em $\{1, \ldots, m\}$. Seja $\overrightarrow{h} = t\overrightarrow{e_j}$, com t em $(-r, r) \setminus \{0\}$. Temos,

$$F(p + t\overrightarrow{e_j}) = F(p) + T(t\overrightarrow{e_j}) + E(t\overrightarrow{e_j}) = F(p) + tT(\overrightarrow{e_j}) + E(t\overrightarrow{e_j}).$$

Logo,

$$\frac{F(p + t\overrightarrow{e_j}) - F(p)}{t} = T(\overrightarrow{e_j}) + \frac{E(t\overrightarrow{e_j})}{t} = T(\overrightarrow{e_j}) + \frac{E(t\overrightarrow{e_j})}{\|t\overrightarrow{e_j}\|}\frac{|t|}{t}.$$

Como $\frac{E(t\overrightarrow{e_j})}{\|t\overrightarrow{e_j}\|} \xrightarrow{t\to 0} 0$ e $\frac{|t|}{t} = \pm 1$, segue que

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{F(p + t\overrightarrow{e_j}) - F(p)}{t} = T(\overrightarrow{e_j}) \blacksquare$$

Notação. No que segue fixamos $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ a base canônica ordenada de $\mathbb{R}^n$ e $\{\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_m}\}$ a base canônica ordenada de $\mathbb{R}^m$. Dada uma aplicação linear

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m ,$$

escrevemos

$$\begin{cases} T(\overrightarrow{e_1}) & = a_{11}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{m1}\overrightarrow{f_m} \\ . & \\ . & \\ . & \\ T(\overrightarrow{e_n}) & = a_{1n}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{mn}\overrightarrow{f_m} , \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, se $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Ainda mais, associamos à aplicação T a sua matriz $[T]$ de representação em relação às bases canônicas supra citadas:

$$[T] = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

A matriz $[T]$ pertence ao espaço vetorial das matrizes retangulares com m linhas e n colunas de números reais: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Notemos que a matriz formada pela primeira coluna de $[T]$ é a matriz dos coeficientes de $T(\overrightarrow{e_1})$. Se $1 \leq j \leq n$ temos,

$$[T(\overrightarrow{e_j})] = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{R}).$$

Esquematicamente escrevemos

$$[T] = \left[\begin{bmatrix} . \\ . \\ T(\overrightarrow{e_1}) \\ . \\ . \end{bmatrix} \ \ldots \ \begin{bmatrix} . \\ . \\ T(\overrightarrow{e_n}) \\ . \\ . \end{bmatrix} \right].$$

Definição. *A* norma (de Hilbert-Schmidt) *de T, indicada $\|T\|$, é dada por*

$$\|T\|^2 = \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|^2.$$

Consideremos, a seguir, uma função $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com Ω um aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$, diferenciável no ponto p pertencente a Ω.

Definição. *A* matriz jacobiana *de F no ponto p, denotada $JF(p)$, é a matriz do diferencial $DF(p) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.*

Indiquemos um ponto x de $\mathbb{R}^n$ por $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e, analogamente, um ponto y de $\mathbb{R}^m$ por $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Então, pelo que já vimos na Proposição 4 temos:

$$DF(p)(\overrightarrow{e_j}) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(p).$$

Apresentando as componentes de F como $F(x) = \big(F_1(x), \ldots, F_m(x)\big)$, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial F_m}{\partial x_j}\right).$$

Logo,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial F_1(p)}{\partial x_j}\overrightarrow{e_1} + \cdots + \frac{\partial F_m(p)}{\partial x_j}\overrightarrow{e_m}.$$

Pela notação previamente introduzida concluímos que a matriz jacobiana satisfaz

$$JF(p) = [DF(p)] = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \text{ com } a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p).$$

Isto é,

$$JF(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & . & . & . & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & . & . & . & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}_{m\times n} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

Notando que a i-ésima linha de $JF(p)$ é formada pelas coordenadas do vetor gradiente de F_i, se $1 \le i \le n$, em relação à base canônica, identificamos

$$JF = \begin{bmatrix} [\quad \overrightarrow{\nabla} F_1 \quad] \\ . \\ . \\ . \\ [\quad \overrightarrow{\nabla} F_m \quad] \end{bmatrix}_{m\times n} = \left[\begin{bmatrix} . \\ . \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ . \\ . \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} . \\ . \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ . \\ . \end{bmatrix}\right]_{m\times n}.$$

Dado um vetor $\overrightarrow{h} = \langle h_1, \ldots, h_n \rangle$ em $\mathbb{R}^n$ temos,

$$JF(p)(\overrightarrow{h}) = \begin{bmatrix} [\quad \overrightarrow{\nabla} F_1 \quad] \\ . \\ . \\ . \\ [\quad \overrightarrow{\nabla} F_m \quad] \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\nabla} F_1(p) \cdot \overrightarrow{h} \\ . \\ . \\ . \\ \overrightarrow{\nabla} F_m(p) \cdot \overrightarrow{h} \end{bmatrix}_{m\times 1} .$$

As desigualdades

$$|\nabla F_i(p) \cdot \overrightarrow{h}| \leq |\nabla F_i(p)| |\overrightarrow{h}|, \text{ para todo } 1 \leq i \leq m,$$

implicam

$$|JF(p)(\overrightarrow{h})| \leq \|JF(p)\| |\overrightarrow{h}| .$$

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Teorema 5 (Teorema do Valor Médio). *Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$. Sejam a e b dois pontos em Ω tais que o segmento $\overline{ab}$ está contido em Ω. Então, existe um ponto p em $\overline{ab}$ tal que*

$$F(b) - F(a) = \overrightarrow{\nabla} F(p) \cdot (b - a).$$

Prova.

Consideremos, em Ω, a curva $\gamma(t) = a + t(b - a)$, com t em $[0, 1]$. É claro que γ é diferenciável e que $\gamma'(t) = b - a$. Pela regra da cadeia a função

$$F \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

é derivável e

$$(F \circ \gamma)'(t) = \nabla F\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t).$$

Pelo TVM em uma variável temos

$$F(b) - F(a) = (F \circ \gamma)(1) - (F \circ \gamma)(0) = (F \circ \gamma)'(t_0) = \nabla F(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0),$$

para algum t_0 em $[0, 1]$. Seja $p = \gamma(t_0)$ em $\overline{ab}$. Concluímos então,

$$F(b) - F(a) = \overrightarrow{\nabla} F(p) \cdot (b - a) \ \blacksquare$$

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Lema 6. *Seja $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear e inversível. Existem $m>0$ e $M>0$ tais que*

$$m\|v\| \;\leq\; \|T(v)\| \;\leq\; M\|v\|\,, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n.$$

Prova.

A existência de M segue do Lema 1. Como T^{-1} é também linear, pelo mesmo lema existe $N>0$ tal que $\|T^{-1}(v)\| \leq N\|v\|$, para todo v em $\mathbb{R}^n$. Logo,

$$\|v\| = \|T^{-1}[T(v)]\| \leq N\|T(v)\|, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n \blacksquare$$

Fixas as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$, utilizemos o isomorfismo entre o espaço vetorial das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ [i.e., $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$] e o espaço vetorial das matrizes retangulares $m\times n$ [i.e., $M_{m\times n}(\mathbb{R})$]. Consideremos em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a norma induzida pela norma usual em $\mathbb{R}^{mn}$. Dado um aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, seja $C^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ o conjunto das funções $F:\Omega\to\mathbb{R}^m$ tais que F e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em Ω. Dizemos que uma função é bicontínua se é bijetora, contínua e com inversa também contínua.

Lema 7. *Consideremos uma função F em $C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, e um ponto p em Ω tal que a matriz jacobiana $JF(p)$ é inversível. Seja $m>0$ tal que $|JF(p)(v)| \geq m|v|$, para todo $v\in\mathbb{R}^n$. Seja também $r>0$ satisfazendo $\|JF(x)-JF(p)\| \leq \frac{m}{2\sqrt{n}}$ e $\det JF(x)\neq 0$ para todo x em $B=B(p;r)$. Temos,*

(a) A desigualdade $|F(x)-F(x')| \;\geq\; \frac{m}{2}|x-x'|$, para x em B e x' em B.

(b) A restrição $F\big|_B : B \longrightarrow F(B)$ é bijetora e bicontínua.

(c) O conjunto $F(B)$ é aberto.

Prova.

As existências de $m>0$ e $r>0$ como no enunciado são garantidas, respectivamente, pelo Lema 6 e pela continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de F. A seguir, consideramos $x\in B$ e y em B.

(a) Aplicando o Teorema do Valor Médio às n funções componentes do campo $F = (F_1, \ldots, F_n)$ temos que para cada i em $\{1, \ldots, n\}$, existe um ponto z_i no segmento $\overline{x'x}$, contido na bola B, tal que $F_i(x) - F_i(x') = \overrightarrow{\nabla} F_i(z_i) \cdot (x - x')$.

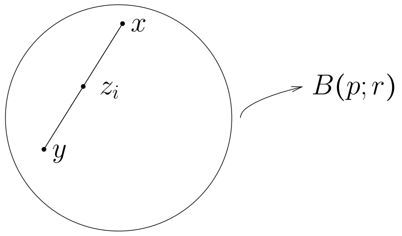


Figura 1: Ilustração ao Lema 7 (a).

Identificando vetores em $\mathbb{R}^n$ por matrizes colunas, escrevemos

$$F(x) - F(x') \equiv \begin{bmatrix} F_1(x) - F_1(x') \\ . \\ . \\ . \\ F_n(x) - F_n(x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla F_1(z_1) \cdot (x - x') \\ . \\ . \\ . \\ \nabla F_n(z_n) \cdot (x - x') \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \nabla F_1(p) \cdot (x - x') \\ . \\ . \\ . \\ \nabla F_n(p) \cdot (x - x') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\nabla F_1(z_1) - \nabla F_1(p)] \cdot (x - x') \\ . \\ . \\ . \\ \nabla F_n(z_n) - \nabla F_n(p)] \cdot (x - x') \end{bmatrix}$$

$$= JF(p)(x - x') \; + \; \mathcal{M}(x - x'), \qquad ,$$

onde $\mathcal{M}$ é a matriz quadrada de ordem n dada por $\mathcal{M} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(z_i) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \right]_{1 \leq i,j \leq n}$.
Para cada z_i temos $|\nabla F_i(z_i) - \nabla F(p)| \leq \|JF(z_i) - JF(p)\| \leq \frac{m}{2\sqrt{n}}$. Desta forma, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto escalar segue,

$$|\mathcal{M}(x - x')|^2 \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} |\nabla F_i(z_i) - \nabla F(p)|^2 \, |x - x'|^2 \;\leq\; \frac{m^2}{4} |x - x'|^2.$$

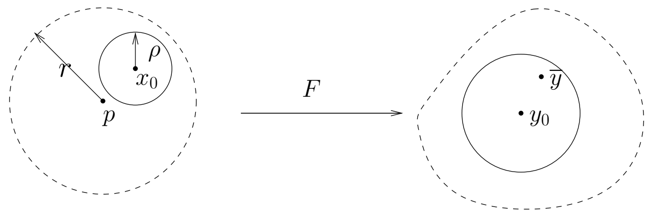
Por fim, pela desigualdade acima e pela hipótese sobre $JF(p)$, concluímos

$$|F(x) - F(x')| \;\geq |JF(p)(x - x')| - |\mathcal{M}(x - x')| \;\geq\; \frac{m}{2} |x - x'| \,.$$

(b) A injetividade segue diretamente de (a). A continuidade e a sobrejetividade são evidentes. Por fim, sejam $\varphi = F\big|_B$ e os pontos $y = F(x)$ e $y' = F(x')$, com x e x' arbitrários em B. A continuidade de φ^{-1} segue de (a) pois,

$$|F(x) - F(x')| \geq \frac{m}{2}|x - x'| \iff \frac{2}{m}|y - y'| \geq |\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y')|.$$

(c) Consideremos x_0 em B e $y_0 = F(x_0)$. Selecionemos $\rho > 0$ tal que o disco compacto $\overline{D}(x_0;\rho) = \{x : |x - x_0| \leq \rho\}$ está contido em B. É suficiente provarmos que a bola aberta $B(y_0\,;\rho m/4)$ está contida em $F(\overline{D}(x_0\,;\rho))$.



$B(y_0;\rho m/4)$

Figura 2: Ilustração ao Lema 7(c).

Seja $\overline{y}$ tal que $|\overline{y} - y_0| < \rho m/4$. Mostremos que o valor mínimo da função distância $|F(x) - \overline{y}|$ restrita ao disco $\overline{D}(x_0\,;\rho)$, assumido em um ponto $\overline{x}$ neste disco, é zero e que $|\overline{x} - x_0| < \rho$. Suponhamos, por contradição, $|\overline{x} - x_0| = \rho$. Então, pela desigualdade triangular, a identidade $y_0 = F(x_0)$, e por (a),

$$\begin{aligned} |F(\overline{x}) - \overline{y}| &\geq |F(\overline{x}) - F(x_0)| - |\overline{y} - y_0| \\ &> \tfrac{m\rho}{2} - \tfrac{\rho m}{4} \\ &> |\overline{y} - y_0| \\ &= |F(x_0) - \overline{y}| \lightning \end{aligned}$$

Assim, segue que $|\overline{x} - x_0| < \rho$ e concluímos que $\overline{x}$ é ponto de mínimo da função $|F(x) - \overline{y}|^2 = \big(F(x) - \overline{y}\big)\cdot\big(F(x) - \overline{y}\big)$ restrita à bola aberta $B(x_0\,;\rho)$. Donde, todas as derivadas parciais de tal função se anulam em $\overline{x}$. Isto é,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x})\cdot\big(F(\overline{x}) - \overline{y}\big) = 0\,,\ \text{para todo } j \text{ em } \{1,\ldots,m\}.$$

Logo, o vetor $F(\overline{x}) - \overline{y}$ é ortogonal ao conjunto $\big\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(\overline{x}),\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{x})\big\}$, formado pelas colunas da matriz $JF(\overline{x})$. Como tal matriz é inversível, tal conjunto é uma base de $\mathbb{R}^n$. Donde concluímos, $F(\overline{x}) - \overline{y} = 0$ e então $F(\overline{x}) = \overline{y}$ ■

Adendo. No lema acima, a hipótese $\det JF(x) \neq 0$, se $x \in B$, é supérflua. Pois, se v é um vetor em $\mathbb{R}^n$ tal que $JF(x)(v) = 0$ então, pelas hipótese sobre JF segue: $m|v| \leq |JF(p)(v)| = |JF(p)(v) - JF(x)(v)| \leq \|JF(x) - JF(p)\|\,|v| \leq \frac{m|v|}{2\sqrt{n}}$. Donde segue $v = 0$ e, assim, o determinante de $JF(x)$ é não nulo.

Teorema 8 (Teorema da Função Inversa). *Seja $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, e $p \in \Omega$ tal que $\det JF(p) \neq 0$. Então, existe uma bola aberta B centrada em p tal que $F(B)$ é um aberto contendo $F(p)$ e $F\big|_B : B \to F(B)$ é inversível e sua inversa, $G : F(B) \to B$, é diferenciável em todo ponto. Ainda mais,*

$$JG(y) = JF\big(G(y)\big)^{-1}, \quad \textit{para todo } y \textit{ no domínio de } G.$$

Prova.

Seja B como no Lema 7. Vimos então que $F(B)$ é aberto e que $G : F(B) \to B$ é bicontínua.

Fixemos um ponto y no domínio de G. Consideremos um vetor arbitrário k em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, com $|k|$ pequeno o suficiente tal que o ponto $y + k$ está no domínio de G. Seja x em B com $F(x) = y$. Existe um vetor h em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfazendo

$$y + k = F(x+h) \quad \text{e} \quad k = F(x+h) - F(x).$$

Donde,

$$G(y+k) = x + h \quad \text{e} \quad G(y) = x.$$

Sendo G contínua, segue que $h \to 0$ se $k \to 0$. Como F é diferenciável em x, temos

$$\begin{cases} F(x+h) - F(x) = \mathcal{M}(h) + E(h)\,, \ \text{com } \mathcal{M} = JF(x)\,, \\ \frac{E(h)}{|h|} \longrightarrow 0 \ \text{ se } h \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Então, utilizando as observações acima, a linearidade de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^{-1}$, a continuidade de $\mathcal{M}^{-1}$ e, ainda, o Lema 7(a) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\left|G(y+k) - G(y) - \mathcal{M}^{-1}(k)\right|}{|k|} &= \frac{\left|x + h - x - \mathcal{M}^{-1}\big[F(x+h) - F(x)\big]\right|}{|F(x+h) - F(x)|} \\ &\leq \frac{\left|h - \mathcal{M}^{-1}\big[\mathcal{M}(h) + E(h)\big]\right|}{\frac{m|h|}{2}}, \\ &= \frac{2}{m}\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{E(h)}{|h|}\right] \xrightarrow{k\longrightarrow 0} \frac{2}{m}\mathcal{M}^{-1}(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Donde, a função G é diferenciável em y com

$$JG(y) = \mathcal{M}^{-1} = JF(x)^{-1} = JF\big(G(y)\big)^{-1} \ \blacksquare$$

Comentários.

(a) Podemos provar a diferenciabilidade de G, e a fórmula para $JG(y)$, sem utilizarmos o item (a) no Lema 7. Com a notação acima escrevamos

$$\begin{aligned}
\frac{G(y+k)-G(y)-\mathcal{M}^{-1}(k)}{|k|} &= \frac{x+h-x\ -\ \mathcal{M}^{-1}\big[F(x+h)-F(x)\big]}{|F(x+h)-F(x)|}\\
&= \frac{h\ -\ \mathcal{M}^{-1}\big[\mathcal{M}(h)\ +\ E(h)\big]}{|\mathcal{M}(h)\ +\ E(h)|},\\
&= -\ \frac{1}{\left|\mathcal{M}\Big(\frac{h}{|h|}\Big)\ +\ \frac{E(h)}{|h|}\right|}\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{E(h)}{|h|}\right].
\end{aligned}$$

Se $k \to 0$, segue que $h \to 0$, $\frac{E(h)}{|h|} \to 0$, e $\mathcal{M}^{-1}\Big[\frac{E(h)}{|h|}\Big] \to 0$. Ainda, com a notação no enunciado do Lema 7 temos $\left|\mathcal{M}\Big(\frac{h}{|h|}\Big)\right| \geq m$, para uma constante $m > 0$. Portanto temos, $\left|\mathcal{M}\Big(\frac{h}{|h|}\Big) + \frac{E(h)}{|h|}\right| \geq \frac{m}{2}$ se $|k|$ é suficientemente pequeno. Logo, o inverso $\left|\mathcal{M}\Big(\frac{h}{|h|}\Big) + \frac{E(h)}{|h|}\right|^{-1}$ é limitado se $|k|$ é pequeno o suficiente. Finalmente, pelo Teorema do Confronto,

$$\frac{G(y+k)-G(y)-\mathcal{M}^{-1}(k)}{|k|} \to 0\,,\ \text{se } k \to 0.$$

Donde, G é diferenciável em y com $JG(y) = \mathcal{M}^{-1} = JF(x)^{-1} = JF\big(G(y)\big)^{-1}$.

(b) Se F é de classe C^k então G também é de classe C^k. De fato, a fórmula $JG(y) = JF\big(G(y)\big)^{-1}$ mostra que as derivadas parciais de G em um ponto y são quocientes de polinômios em várias variáveis [n^2 variáveis] avaliados nas derivadas parciais de F no ponto $G(y)$ por um polinômio em várias variáveis [o determinante de uma matriz $n \times n$] que não se anula quando avaliado nas derivadas parciais de F no ponto $G(y)$. Consequentemente, se F é de classe C^k, com $k \geq 1$, então G também é de classe C^k.

(c) Dizemos que uma função é suave se ela é de classe C^∞ (isto é, de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}$). Assim, se F é suave então G também é suave. Se uma função e sua inversa são ambas suaves dizemos que tais funções são difeomorfismos.

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

O Teorema da Função Implícita se aplica, em geral, quando temos m equações e $n+m$ variáveis. Analogamente a um simples sistema linear (com m equações e $n+m$ incógnitas) tratamos $(n+m)-m=n$ variáveis como variáveis independentes e procuramos determinar as demais m variáveis, ditas variáveis dependentes, em função das n variáveis independentes.

Exemplo 1. Consideremos o sistema não linear com duas equações e quatro variáveis x, y, w, e z,

$$\begin{cases} xz^3+y^3w^2+2xy &= 0 \\ xywz-1 &= 0. \end{cases}$$

Tratemos x e y como variáveis independentes e as variáveis w e z como funções nas variáveis x e y. Então, considerando a função

$$F(x,y,w,z)=\left(xz^3+y^3w^2+2xy,\, xywz-1\right),$$

determinemos, se possível, as derivadas parciais da função em duas variáveis $f(x,y)=\big(w(x,y),z(x,y)\big)$ que satisfaz a equação

$$F\big(x,y,f(x,y)\big)=(0,0).$$

Pela regra da cadeia temos, utilizando matrizes jacobianas,

$$\begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x & 2y^3w & 3xz^2 \\ ywz & xwz & xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e obtemos

$$\begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde segue,

$$(E1.1) \qquad \begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix}.$$

Estas última equação matricial nos permite obter as derivadas parciais de $w(x,y)$ e $z(x,y)$ nos pontos (x,y,w,z) que satisfazem

$$\begin{vmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

e em tais pontos obtemos

$$(E1.2) \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2y^3w & 3xz^2 \\ xyz & xyw \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z^3+2y & 3y^2w^2+2x \\ ywz & xwz \end{bmatrix} .$$

Ainda mais, indicando F segundo suas funções componentes,

$$F = (F_1, F_2) \ \text{ com } F_1(x,y,w,z) = \ xz^3 + y^3w^2 + 2xy \ \text{ e } \ F_2(x,y,w,z) = xywz - 1\,,$$

reescrevemos a equação (E1.2) como

$$(E1.3) \qquad Jf \ = \ - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial w} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}, \ \text{ com } Jf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Assim, $-Jf$ é o produto da inversa da matriz das derivadas parciais de F em relação às duas últimas variáveis [as variáveis dependentes w e z, nesta ordem] pela matriz das derivadas parciais de F em relação às duas primeiras váriaveis [as variáveis independentes x e y, nesta ordem] ■.

Notemos a semelhança da fórmula (E1.3) no exemplo acima com a fórmula

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,h(x))}\,, \ \text{ se } g(x,h(x)) = 0 \ \text{ e } \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0,$$

que surge nos casos mais simples em que aplicamos o Teorema da Função Implícita.

Destacamos que no Exemplo 1 acima efetuamos os cômputos assumindo a existência das funções $w(x,y)$ e $z(x,y)$. O teorema que nos garante a existência de tais funções é o Teorema da Função Implícita que passamos a enunciar.

Notação. Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Fixemos um ponto (a,b) em Ω, com a em $\mathbb{R}^n$ e b em $\mathbb{R}^m$. Indiquemos por (x,y) a variável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, com $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a variável em $\mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$ a variável em $\mathbb{R}^m$. Dada $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, escrevemos $F = (F_1, \ldots, F_m)$ segundo suas m funções componentes.

Teorema 9 (Teorema da Função Implícita). *Seja F em $C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tal que*

$$F(a,b) = 0.$$

Suponhamos que a matriz quadrada $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right]_{1\le i,j\le m}$ é inversível. Então, existem um conjunto A aberto em $\mathbb{R}^n$, com a em A, e um conjunto B aberto em $\mathbb{R}^m$, com b em B, tais que:

Existe uma única função $f : A \to B$ satisfazendo

$$F\big(x, f(x)\big) = 0, \ \text{para todo } x \text{ em } A.$$

A função f satisfaz $f(a) = b$, é de classe C^1, e para todo x em A temos

$$Jf(x) \ = \ - \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, f(x))\right]_{m\times m}^{-1} \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, f(x))\right]_{m\times n}.$$

Prova. Dividamos a prova em quatro partes.

- Existência de f. Consideremos a função

$$\Phi(x,y) = \big(x, F(x,y)\big), \ \text{com } (x,y) \text{ em } \Omega.$$

Temos que $\Phi(a,b) = \big(a, F(a,b)\big) = (a, 0)$, com matriz jacobiana

$$J\Phi(a,b) \ = \ \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & . & . & 0 \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ 0 & & & 1 \end{array}\right]_{n\times n} & \left[\begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \end{array}\right]_{n\times m} \\ \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a,b)\right]_{m\times n} & \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right]_{m\times m} \end{array}\right]_{(n+m)\times(n+m)}.$$

Logo,

$$\det J\Phi(a,b) = \det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right] \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existe um aberto da forma $\mathcal{A}\times B$ contido em Ω, com $\mathcal{A}$ aberto em $\mathbb{R}^n$, B aberto em $\mathbb{R}^m$, a em $\mathcal{A}$, e b em B, tal que $\Phi(\mathcal{A}\times B)$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+m}$ e a função restrição, também indicada por Φ,

$$\Phi : \mathcal{A}\times B \to \Phi(\mathcal{A}\times B) \text{ é inversível, com inversa } \Phi^{-1} \text{ de classe } \ C^1.$$

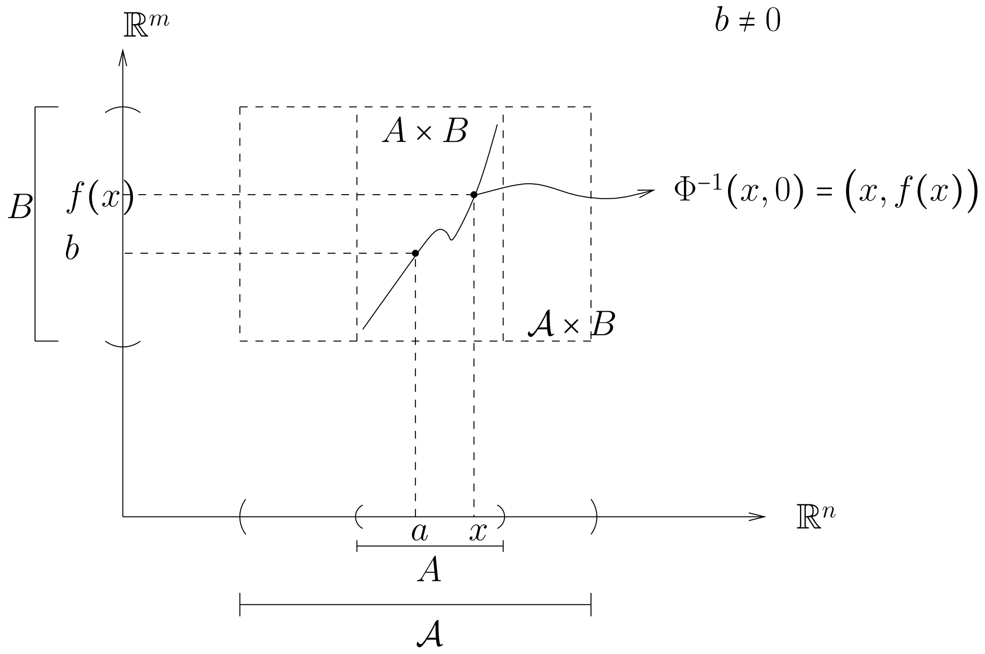


Figura 3: Ilustração ao Teorema da Função Implícita.

Visto que o par $(a,0) = \Phi(a,b)$ pertence a $\Phi(\mathcal{A}\times B)$, segue que existe A aberto em $\mathbb{R}^n$ tal que: a pertence a A e $A\times\{0\}$ está contido em $\Phi(\mathcal{A}\times B)$. Consideremos x arbitrário em A. Então, da definição de Φ segue que

$$\Phi^{-1}(x,0) = \big(x, f(x)\big) \text{ é um par em } A\times B\,.$$

Logo, f é uma função de A em B. Ainda, $(x,0) = \Phi\big(x, f(x)\big) = \Big(\,x, F\big(x, f(x)\big)\Big)\,.$ No caso particular $x = a$ temos $\Phi\big(a, f(a)\big) = (a,0) = \Phi(a,b)$. Por fim, temos

$$\begin{cases} F\big(x, f(x)\big) = 0\,, \text{ para todo } x \text{ em } A\,. \\ f(a) = b\,. \end{cases}$$

- **Unicidade de f.** Consideremos um ponto x em A e pontos b_1 e b_2, ambos em B, satisfazendo $F(x,b_1) = F(x,b_2) = 0$. Então, valem as identidades $\Phi(x,b_1) = \big(x, F(x,b_1)\big) = (x,0) = \big(x, F(x,b_2)\big) = \Phi(x,b_2)$. Portanto, $b_1 = b_2$.

- **Diferenciabilidade de f.** Visto que Φ^{-1} é de classe C^1, através da identidade $\Phi^{-1}(x,0) = \big(x, f(x)\big)$ para todo x em A, concluímos que f é de classe C^1.

- **Fórmula de Derivação.**

  Para cada $x = (x_1,\ldots,x_n)$ em A, temos $F(x,f(x)) = 0$, com 0 em $\mathbb{R}^m$. Sendo que pela regra da cadeia, a matriz jacobiana da função $F\big(x,f(x)\big)$ é

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \\ \begin{bmatrix} Jf \end{bmatrix}_{m\times n} \end{array}\right]_{(n+m)\times n}.$$

  Assim, obtemos a equação matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m\times n} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} Jf \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

  Finalmente,

$$Jf(x) = -\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\big(x,f(x)\big)\right]^{-1}_{m\times m} \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\big(x,f(x)\big)\right]_{m\times n} \quad \blacksquare$$

O gráfico de f. Mantendo as hipóteses e a notação do teorema acima e indicando o gráfico de f por $\mathrm{Gr}(f)$, é importante ressaltar que

$$\Big\{(x,y) \in A\times B : F(x,y) = 0\Big\} = \Big\{(x,f(x)) : x \in A\Big\} = Gr(f).$$

$F \in C^1$ IMPLICA F DIFERENCIÁVEL

Proposição 10. *Seja $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, e p em Ω. Suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de F existam em todo ponto de uma bola aberta $B(p;r)$, centrada em p e contida em Ω e com $r > 0$, e que tais derivadas sejam contínuas em p. Então, F é diferenciável no ponto p.*

Prova.

Apresentemos o campo vetorial F segundo suas funções componentes: $F = F(x) = \big(F_1(x), \ldots, F_m(x)\big)$, para x em Ω. Consideremos um vetor $\overrightarrow{h}$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $0 < |\overrightarrow{h}| < r$. Seja T_p a aplicação linear cuja matriz em relação às bases usuais de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é $JF(p)$. Logo, $T_p(\overrightarrow{h}) = JF(p)(\overrightarrow{h})$ e então,

$$F(p+\overrightarrow{h}) - F(p) - T_p(\overrightarrow{h}) \equiv \begin{bmatrix} F_1(p+\overrightarrow{h}) - F_1(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_m(p+\overrightarrow{h}) - F_m(p) \end{bmatrix}_{m\times 1} - \begin{bmatrix} \nabla F_1(p)\cdot \overrightarrow{h} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla F_m(p)\cdot \overrightarrow{h} \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para cada índice i em $\{1, \ldots, m\}$ existe um ponto $p_i = p_i(\overrightarrow{h})$, dependendo do vetor $\overrightarrow{h}$ e no segmento que une os pontos p e $p+\overrightarrow{h}$ [o segmento está contido em $B(p;r)$], tal que $F_i(p+\overrightarrow{h}) - F_i(p) = \nabla F_i(p_i)\cdot\overrightarrow{h}$. Consequentemente,

$$\frac{F(p+\overrightarrow{h}) - F(p) - T_p(\overrightarrow{h})}{|\overrightarrow{h}|} \equiv \begin{bmatrix} \big[\nabla F_1(p_1) - \nabla F_1(p)\big]\cdot \frac{\overrightarrow{h}}{|\overrightarrow{h}|} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \big[\nabla F_m(p_m) - \nabla F_m(p)\big]\cdot \frac{\overrightarrow{h}}{|\overrightarrow{h}|} \end{bmatrix} \xrightarrow{\overrightarrow{h}\longrightarrow\overrightarrow{0}} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

REFERÊNCIAS

1. Knapp, A. W., *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, 2005.
2. Rudin, W., *Princípio de Análise Matemática*, Ed. Universidade de Brasília, 1971.
3. Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.