

MAT 211 - Cálculo III - IMEUSP
Primeiro semestre de 2018
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 4 DE EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x, y) = 1$, para todo $(x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$. Prove que

$$\iint_R f(x, y) dx dy = (b - a)(d - c).$$

2. Seja $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap R \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap R. \end{cases}$$

Determine se f é integrável ou não. Se f é integrável, compute sua integral.

3. Prove, a partir da definição de integral dupla e da teoria da integração em \mathbb{R} ,

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} x dx dy = \frac{(b^2 - a^2)}{2} (d - c) = (d - c) \int_a^b x dx.$$

4. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e positivas. Prove, a partir da definição de integral dupla e da teoria da integração em \mathbb{R} , que o produto fg é integrável e

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right).$$

5. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, com X um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Mostre que

$$\inf_X f + \inf_X g \leq \inf_X (f + g) \quad \text{e} \quad \sup_X (f + g) \leq \sup_X f + \sup_X g.$$

6. Sejam X um conjunto (universo), I um conjunto de índices e $\{A_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos de X . O complementar de um subconjunto A de X é $A^c = X \setminus A$. Mostre as relações

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

7. Seja $R = [a, b] \times [c, d]$. Para A um subconjunto de \mathbb{R}^2 temos as definições abaixo.

- O complementar de A é $A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$.
- O interior de A é $\text{int}(A) = \{a \in A : \text{existe } r > 0 \text{ tal que } B(a; r) \subset A\}$.
- O fecho de A é $\overline{A} = \{p \in \mathbb{R}^2 : B(p; r) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0\}$.
- A fronteira de A é $\partial A = \{p \in \mathbb{R}^2 : B(p; r) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(p; r) \cap A^c \neq \emptyset, \forall r > 0\}$.

Com o símbolo \cup indicando uma união de conjuntos dois a dois disjuntos, mostre

(i) $R = \text{int}(A) \cup \partial A \cup (R \setminus \overline{A})$

(ii) $1 = \chi_{\text{int}(A)} + \chi_{\partial A} + \chi_{R \setminus \overline{A}}$.

8. Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Mostre que

(i) O conjunto $A \setminus \text{int}(A)$ está contido na fronteira de A . Isto é,

$$A \setminus \text{int}(A) \subset \partial A.$$

(ii) A fronteira do interior de A está contida na fronteira de A . Isto é,

$$\partial(\text{int}(A)) \subset \partial A.$$

(iii) $\chi_A = \chi_{\text{int}(A)} + \chi_{A \setminus \text{int}(A)}$.

Sugestão. Faça um desenho ilustrativo.

9. Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Mostre que

(i) A fronteira de \overline{A} está contida na fronteira de A . Isto é,

$$\partial(\overline{A}) \subset \partial A.$$

(ii) A fronteira de $\overline{A} \setminus A$ está contida na fronteira de A . Isto é,

$$\partial(\overline{A} \setminus A) \subset \partial A.$$

(iii) $\chi_{\overline{A}} = \chi_A + \chi_{\overline{A} \setminus A}$.

Sugestão. Faça um desenho ilustrativo.

10. Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua, com K compacto em \mathbb{R}^2 . Mostre que $f(K)$ é compacto.

Sugestão. Utilize a seguinte caracterização de compacidade: “ K é compacto se e somente se toda sequência em K admite uma subsequência convergente a um ponto de K ”. Considere então uma sequência $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em $f(K)$ e mostre que ela admite uma subsequência convergente em $f(K)$.

11. Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R}^2 , com $A \subset B$. Mostre que se B tem conteúdo nulo então A também tem conteúdo nulo.

12. (i) Sejam A e B dois subconjuntos de \mathbb{R}^2 , ambos com conteúdo nulo. Mostre que $A \cup B$ tem conteúdo nulo.

(ii) Mostre que a reunião finita de conjuntos de conteúdo nulo é um conjunto de conteúdo nulo.

13. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, com ∂A de conteúdo nulo. Mostre as afirmações abaixo.

- (i) A restrição de f ao aberto $\text{int}(A)$, denotada por $f|_{\text{int}(A)} : \text{int}(A) \rightarrow \mathbb{R}$, e que abusando da notação indicamos apenas por f , é uma aplicação integrável e

$$\iint_{\text{int}(A)} f \, dx \, dy = \iint_A f \, dx \, dy.$$

- (ii) Consideremos $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão limitada qualquer de f ao compacto \bar{A} . Então, \bar{f} é uma função integrável e

$$\iint_{\bar{A}} \bar{f} \, dx \, dy = \iint_A f \, dx \, dy.$$

Sugestão. Utilize os exercícios 8, 9 e 11. Talvez também lhe seja útil ou o Corolário 9, ou a Proposição 10 ou o Lema 12 (ou uma combinação deles) nas notas de aulas.

14. Seja A um conjunto de conteúdo nulo. Mostre que ∂A tem conteúdo nulo.

15. Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R}^2 , com $A \subset B$. Mostre que se B tem medida nula então A também tem medida nula.

16. (i) Sejam A e B dois subconjuntos de \mathbb{R}^2 , ambos com medida nula. Mostre que $A \cup B$ tem medida nula.

(ii) Mostre que a reunião finita de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula.

17. Seja $F : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e $C \subset R$ tal que C tem conteúdo nulo. Seja $G : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada tal que $G \equiv F$ em $R \setminus C$. Mostre que G é integrável e

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} G \, dx \, dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} F \, dx \, dy.$$

Sugestão. Aplique o *Teorema de Caracterização para funções integráveis*.

18. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e A um subconjunto limitado do plano com fronteira de conteúdo nulo. Mostre que f é integrável.

Sugestão. Aplique o *Teorema de Caracterização para funções integráveis*.

19. (**Desigualdade Triangular para Integrais.**) Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Mostre que a função $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$\left| \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

Sugestão. Aplique o *Teorema de Caracterização para funções integráveis*.

20. Estude, e reescreva com suas próprias palavras, a demonstração de que toda função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, onde K é um compacto em \mathbb{R}^2 , é uniformemente contínua.