Prova Substitutiva de MAT147-Cálculo II - FEA-USP
30/11/2012

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

Nome : ____
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Escolha 5 (cinco) questões. Justifique todas as passagens.

Boa Sorte!

1. Determine a posição relativa e a distância entre as retas

$$r : x = 1 + \lambda,\ y = 1 + 6\lambda,\ z = 2\lambda\,, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \text{e}$$
$$s : x = 1 + 2\mu,\ y = 5 + 15\mu,\ z = -2 + 6\mu\,, \quad \mu \in \mathbb{R}\ .$$

2. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

(b) Determine as derivadas parciais de f (se existirem) em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Justifique.

(d) Determine se a função f é diferenciável em $(0,0)$.

3. Calcule o comprimento da curva

$$\gamma(t) = (e^{-t}\mathrm{cos}t, e^{-t}\sin t, e^{-t}), \quad t \in [0, 1].$$

4. Suponhamos que todas as funções a seguir são diferenciáveis. Sejam $F = (x, y, z)$ e $G(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e $y = y(x)$ e $z = z(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) & = 2012, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ G(x, y(x), z(x)) & = 2013, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ (0, y(0), z(0)) & = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Suponha ainda que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = 3, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 5, \\ \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0) = 6, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(0,0,0) = 7, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0) = 8. \end{cases}$$

Determine os valores de

$$\frac{dy}{dx}(0) \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx}(0).$$

5. A função $z = z(x, y)$ é diferenciável e dada implícitamente pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Mostre que

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1$$

é a equação do plano tangente ao gráfico de $z = z(x, y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0).

6. Estude com relação a máximos e mínimos locais/globais e pontos de sela a função

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2.$$

7. Seja $M = \{f(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 1 \text{ e } x^2 - yz = 0\}$.

Encontre os pontos de M que maximizam a cota z.

Verifique que tal intersecção de superfícies é um conjunto fechado e limitado.