2ª Prova de MAT 147 - Cálculo II - FEA-USP
15/10/2012

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

Nome : __________GABARITO__________
NºUSP : ____________________
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Escolha 5 (cinco) questões. Justifique todas as passagens.

Boa Sorte!

1. (Vide Um Curso de Cálculo, H. L. Guidorizzi, Vol. 2, 5ª ed., Exemplo 3 pp. 193-194) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.
(b) Determine as derivadas parciais de f (se existirem) em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(c) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Justifique.
(d) Determine se a função f é diferenciável em $(0,0)$.

Solução.

(a) Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, a função f é o quociente de dois polinômios (contínuos) com o denominador não se anulando. Logo, f é aí contínua.
Na origem temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1, \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Assim, pelo teorema do confronto segue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Donde, f é também contínua na origem. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) É fácil ver que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{x} = 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{y\to0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c) Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, as derivadas parciais de f são quocientes de polinômios com o denominador não se anulando. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas aí. Logo, por um teorema provado em aula, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(d) Quanto à origem, analisemos se é zero ou não o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \; - \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = .$$

Se $h = k > 0$ obtemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{2\sqrt{2}h^2|h|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Logo, f não é diferenciável na origem■

2. (Vide Guidorizzi, Cálculo, Vol 2, 5ª edição, Exercício 26 p. 185)

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Seja $\gamma(t) = (t, t, z(t))$, com $t \in \mathbb{R}$, uma curva contida no gráfico de f. Isto é, temos $z(t) = f(t,t)$.

(a) Determine a reta tangente T à curva γ no ponto $\gamma(0)$.

(b) Determine as derivadas parciais de f na origem e o plano

$$\pi: \ z - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0).$$

(c) Determine se reta T está contida no plano π acima.

(d) A função f é diferenciável em $(0,0)$?

Solução.

(a) Temos

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t, \frac{2t^3}{t^2+t^4}), & \text{se } t \neq 0, \\ (0,0,0), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\left(1, 1, \frac{2t^2}{t^2+t^4}\right) = \lim_{t\to 0}\left(1, 1, \frac{2}{1+t^2}\right) = (1,1,2).$$

Logo, $\gamma'(0) = (1,1,2)$ e

$$\mathsf{T}: \quad \mathsf{T}(\lambda) = (\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}) = (0,0,0) + \lambda(1,1,2), \text{ onde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Como $f(x,0) = 0$ para todo x e $f(0,y) = 0$ para todo y, temos

$$\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial \mathsf{x}}(0,0) = \frac{\partial \mathsf{f}}{\partial \mathsf{y}}(0,0) = 0.$$

Assim,

$$\pi: \quad \mathsf{z} = 0.$$

(c) Como o ponto $T(1) = (1,1,2)$ não pertence ao plano π, segue que a reta T não está contida no plano π.

(d) A função dada não é diferenciável na origem pois se f fosse diferenciável na origem então a reta tangente T estaria contida no plano π■

3. (Vide Guidorizzi, Cálculo, Vol 2, 5ª edição, Exercício 9 p. 204)

Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

e que contenham a intersecção dos planos

$$\pi_1 : \ x + y + z = 3 \ \text{ e } \ \pi_2 : \quad z = 0.$$

Primeira Solução.

A intersecção dos planos π_1 e π_2 é a reta (uma possível parametrização)

$$r : \quad (x,y,z) = (0,3,0) + t(1,-1,0), \quad \text{onde} \quad t \in \mathbb{R}.$$

A equação geral dos planos tangentes ao gráfico de f, $\mathrm{Gr}(f)$, é

$$\pi_{\text{geral}} : \quad 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - [z - f(x_0, y_0)] = 0.$$

Isto é,

$$\pi_{\text{geral}} : \quad 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - x_0^2 - y_0^2) = 0.$$

Ou ainda,

$$\pi_{\text{geral}} : \quad 2x_0 x + 2y_0 y - z = x_0^2 + y_0^2.$$

Se π é o plano tangente a $\mathrm{Gr}(f)$ e contendo a reta $\{(t, 3-t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$, temos

$$2x_0 t + 2y_0(3 - t) = x_0^2 + y_0^2, \ \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Donde facilmente obtemos $(2x_0 - 2y_0)t = x_0^2 + y_0^2 - 6y_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Donde facilmente concluimos

$$2x_0 - 2y_0 = 0 \quad \text{e} \quad x_0^2 + y_0^2 - 6y_0 = 0.$$

Assim, obtemos $y_0 = x_0$ e $2x_0^2 - 6x_0 = 0$. Encontramos então os pontos

$$(x_0, y_0) = (0,0) \quad \text{e} \quad (x_0, y_0) = (3,3).$$

Assim, determinamos como soluções o plano

$$\mathsf{z = 0}$$

e o plano

$$\mathsf{6x + 6y - z = 18.}$$

Vide segunda solução no verso.

Segunda Solução.

O vetor normal ao plano procurado é

$$\overrightarrow{n} = \langle 2x_0, 2y_0, -1 \rangle .$$

A reta dada pela interseção dos planos π_1 e π_2,

$$r = \{(0,3,0) + t(1,-1,0), \text{ com } t \text{ em } \mathbb{R}\},$$

tem vetor diretor

$$\overrightarrow{v}_r = \langle 1, -1, 0 \rangle$$

e está contida no plano tangente procurado. Segue então que

$$0 = \langle 2x_0, 2y_0, -1 \rangle . \langle 1, -1, 0 \rangle = 2x_0 - 2y_0.$$

Donde concluímos $y_0 = x_0$. A equação do plano tangente procurado é então,

$$\begin{cases} \pi : \quad 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - [z - f(x_0, y_0)] = 0, \\ \text{com } y_0 = x_0, \\ \text{e } (0,3,0) \text{ pertencente a } \pi. \end{cases}$$

Obtemos então,

$$2x_0(0 - x_0) + 2x_0(3 - x_0) - (0 - 2x_0^2) = 0.$$

Logo,

$$-2x_0^2 + 6x_0 = 0.$$

Donde segue

$$(x_0, y_0) = (0,0) \quad \text{ou} \quad (x_0, y_0) = (3,3).$$

Assim sendo encontramos dois planos:

$$\mathsf{z = 0}$$

ou

$$\mathsf{6x + 6y - z = 18} \blacksquare$$

4. Considere as funções

$$\begin{cases} z = z(x,y) = e^x \text{cos} y \\ x = x(t,s) = ts \\ y = y(t,s) = \sqrt{t^2+s^2}. \end{cases}$$

(a) Compute as derivadas parciais envolvidas.

(b) Verifique a fórmula

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Solução.

(a) Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= e^x \text{cos} y & \frac{\partial z}{\partial y} &= -e^x \sin y \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= s & \frac{\partial x}{\partial s} &= t \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{t}{\sqrt{t^2+s^2}} & \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{s}{\sqrt{t^2+s^2}}. \end{aligned}$$

Definindo

$$z(t,s) = e^{ts} \text{cos} \sqrt{t^2+s^2}$$

obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = s e^{ts} \text{cos} \sqrt{t^2+s^2} \; - e^{ts} \frac{t}{\sqrt{t^2+s^2}} \sin \sqrt{t^2+s^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = t e^{ts} \text{cos} \sqrt{t^2+s^2} \; - e^{ts} \frac{s}{\sqrt{t^2+s^2}} \sin \sqrt{t^2+s^2}.$$

(b) Com as notações acima, no ponto $\Big(x(t,s), y(t,s)\Big) = (ts, \sqrt{t^2+s^2})$ temos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \Big(x(t,s), y(t,s)\Big) = \Big[e^{ts} \text{cos} \sqrt{t^2+s^2} \quad - e^{ts} \sin \sqrt{t^2+s^2} \Big].$$

Desta forma concluímos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \Big[e^{ts} \text{cos} \sqrt{t^2+s^2} \quad - e^{ts} \sin \sqrt{t^2+s^2} \Big] \begin{bmatrix} s & t \\ \frac{t}{\sqrt{t^2+s^2}} & \frac{s}{\sqrt{t^2+s^2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix} \blacksquare$$

5. (Vide H. L. Guidorizzi, Cálculo, Vol 2, 5ª edição, Exemplo (resolvido) 3, p. 255)
A imagem da curva γ está contida na intersecção das superfícies

$$x^2 + 2y^2 + z = 4 \quad \text{e} \quad x^2 + y + z = 3.$$

Suponha $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

(a) Determine a reta tangente a γ no ponto $\gamma(t_0)$.

(b) Determine uma curva $\gamma = \gamma(t)$ nas condições acima.

Solução.

(a) O vetor $\gamma'(t_0)$ tangente a γ no ponto $(1, 1, 1)$ tem a direção do vetor dado pelo produto vetorial dos normais às superfícies dadas, no ponto $(1, 1, 1)$:

$$(2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) \times (2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = 3\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{k}.$$

Assim, simplificando a apresentação, a reta tangente procurada é

$$\mathsf{T}: \quad (\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 0, -2), \ \text{com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Subtraindo a segunda equação da primeira equação do sistema

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 4 \\ x^2 + y + z = 3 \end{cases}$$

obtemos $2y^2 - y = 1$. Logo, $y = 1$ ou $y = -1/2$. Como γ passa por $(1, 1, 1)$, nos restringimos a $y = 1$. Deduzimos então, com qualquer das duas equações de $\mathcal{S}$,

$$z = 2 - x^2.$$

Assim, determinamos a curva γ:

$$\gamma(\mathsf{t}) = (\mathsf{t}, 1, 2 - \mathsf{t}^2), \ \text{onde } \mathsf{t} \in \mathbb{R} \blacksquare$$

6. (Vide H. L. Guidorizzi, Cálculo, Vol 2, 5ª edição, Exemplo (resolvido) 1, p. 253)
Considere a superfície

$$S:\ xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z.$$

Determine

(a) a equação do plano tangente a S no ponto $(1, -1, 2)$.
(b) a equação da reta normal a S no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução.

(a) S é a superfície de nível zero de

$$F(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0,$$

cujo gradiente é

$$\overrightarrow{\nabla} F = \left\langle yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3 \right\rangle.$$

Logo, um vetor normal ao plano π tangente a S em $(1, -1, 2)$ é:

$$\overrightarrow{\nabla} F(1, -1, 2) = \langle 1, 5, 8 \rangle.$$

Logo,

$$\pi:\quad 1(\mathsf{x} - 1) + 5(\mathsf{y} + 1) + 8(\mathsf{z} - 2) = 0.$$

(b) A reta N normal a S em $(1, -1, 2)$ é

$$\mathsf{N}:\quad (\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}) = (1, -1, 2) + \lambda(1, 5, 8),\ \text{onde } \lambda \in \mathbb{R} \blacksquare$$

7. Suponhamos que todas as funções a seguir são diferenciáveis. Sejam $F = (x, y, z)$ e $G(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e $y = y(x)$ e $z = z(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) & = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ G(x, y(x), z(x)) & = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ (0, y(0), z(0)) & = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Suponha ainda que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = 3, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 4, \\ \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0) = 4, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(0,0,0) = 6, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0) = 9. \end{cases}$$

Determine os valores de

$$\frac{dy}{dx}(0) \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx}(0).$$

Solução.

Pela regra da cadeia temos, derivando as duas primeiras equações do sistema acima em relação a x e avaliando as derivadas em $x = 0$,

$$\begin{cases} F_x(0,0,0).1 + F_y(0,0,0)y'(0) + F_z(0,0,0)z'(0) = 0 \\ \\ G_x(0,0,0).1 + G_y(0,0,0)y'(0) + G_z(0,0,0)z'(0) = 0. \end{cases}$$

Substituindo os valores dados obtemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então, pela regra de Cramer concluímos

$$y'(0) = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad z'(0) = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{3} = 0 \ \blacksquare$$