$7^{\underline{a}}$ Lista de MAT147 - Cálculo II - FEAUSP
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2012
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Ache os pontos de máximo e de mínimo da função $F(x,y,z) = x + 2y + z$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

2. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$.

3. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

4. Determine o ponto da reta $r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ mais próximo da origem.

5. Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.

6. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ minimizando a soma dos quadrados das distâncias aos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

7. Maximize $F(x,y,z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

8. Ache P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e Q na reta $x + y = 4$ o mais próximos possível.

9. Ache os extremantes de $f(x,y) = y^2 - x^2$ sobre $K = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

10. Estude, com relação a máximos e mínimos, e com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$, a função
$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2.$$

11. Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função
$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$
sobre o compacto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ \text{ e } \ z \geq 1\}$.

12. Estude com relação a máximos e mínimos locais, e pontos de sela, a função
$$F(x,y,z) = \frac{x^5}{5} + y^4 + z^4 - \frac{x^3}{3} - 2y^2.$$

13. Considere $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, com $(x,y,z) \in I\!R^3$ e as restrições
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{e} \quad x + y - z = 0.$$
   (a) Existem o máximo e o mínimo de F sujeita tais restrições? Justifique.
   (b) Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimo e seus valores.

14. Dada $f(x,y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes de f e os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f no quadrado

$$K = [-1,+1] \times [-1,+1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 1\}.$$

15. Ache os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1\ .$$

16. (a) Seja $c > 0$ uma constante. Determine o valor máximo de

$$F(x,y,z) = xyz \text{ sobre a superfície } x + y + z = c, \text{ com } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0.$$

(b) Conclua que a média geométrica de três números $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ é menor ou igual a média aritmética destes números. Isto é,

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

17. Determine o paralelepípedo-retângulo de volume máximo, com arestas paralelas aos eixos, inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

18. Seja $X = [x_{ij}] \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com linhas X_1, X_2 e X_3. Mostre a desigualdade

$$\text{(Hadamard)} \quad \det X \leq |X_1||X_2||X_3|, \text{ onde } |X_i| \text{ é a norma usual de } X_i\ .$$

19. Determine as distâncias máxima e minima da origem à curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

20. Determine entre os pontos da curva dada pela intersecção das superfícies

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

os que estão mais próximos da origem.

21. Sejam $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$. Determine o valor máximo de

$$F(x,y,z) = x^a y^b z^c \text{ sob a condição } x + y + z = 1, \text{ com } x > 0, y > 0 \text{ e } z > 0.$$

22. Sejam $p > 0$ e $q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seja $c > 0$. Sejam x e y variáveis positivas.

(a) Ache o valor mínimo de $f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ sobre a hipérbole $xy = c$.

(b) Mostre a desigualdade

$$\text{(Hölder)} \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \text{ para quaisquer } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$

23. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z^2 = 1; x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Verifique que M é compacto.

(b) Ache os pontos de M mais próximos e os mais distantes, ambos da origem.

24. Seja $M = \{f(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 1 \text{ e } x^2 - yz = 0\}$.

(a) Verifique que M é compacto.

(b) Encontre os pontos de M que maximizam a cota z.