

4ª Lista de MAT147 - Cálculo II - FEA-USP
2º semestre de 2012
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Verifique e/ou compute:

- (a) f é contínua em $(0, 0)$? E nos demais pontos?
- (b) Compute f sobre as retas passando pela origem.
- (c) Compute f sobre a parábola $\{(y^2, y) : y \in \mathbb{R}\}$.
- (d) Compute as derivadas parciais de f na origem.
- (e) As derivadas parciais de f são contínuas na origem? E nos demais pontos?
- (f) f é diferenciável na origem? E nos demais pontos?
- (g) Esboce as curvas de nível de f .
- (h) Determine a imagem de f .
- (i) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f .

2. Dê exemplos de funções f em duas variáveis reais a valores reais e de um ponto P_0 tais que (prove suas afirmações)

- (a) f é contínua em P_0 mas não é diferenciável em P_0 .
- (b) f admite derivadas parciais em P_0 mas não é diferenciável em P_0 .
- (c) f admite todas as derivadas direcionais em P_0 mas não é diferenciável em P_0 .
- (d) f é diferenciável em P_0 mas as derivadas parciais não são contínuas em P_0 .
- (e) f admite derivadas parciais em $P_0 = (x_0, y_0)$ mas o plano

$$\pi : f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \quad z_0 = f(P_0) = f(x_0, y_0).$$

não é tangente ao gráfico de f .

(f) Existe $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$, $\forall \vec{v}$ unitário, mas não vale a fórmula $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{v}$, $\forall \vec{v}$ unitário.

3. Consideremos a função,

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico de f .
- (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- (c) Determine o conjunto dos pontos em que f é diferenciável.

4. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente.

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$ b) $f(x, y) = \ln \|(x, y)\|$ em $(1, -1)$.

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

5. Seja $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, 3)$ com $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde \vec{u} aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f .

6. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ é uma distribuição de temperatura no plano x, y . Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

7. Sejam $f(x, y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t)$.

(a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.

(b) Desenhe a imagem de γ .

(c) Verifique que para todo t , $\gamma'(t) \cdot \vec{\nabla} f(\gamma(t)) = 0$.

8. Calcule a derivada direcional da função dada no ponto e direção \vec{w} indicados.

(a) $f(x, y, z) = xyz$ em $(1, 1, 1)$ e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1, 2, -1)$ e na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

9. a) Dada $z = f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ o plano tangente em (x_0, y_0, z_0) , $z_0 = f(x_0, y_0)$, tem equação

$$\pi : \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 .$$

b) Definindo $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, o gráfico de f é a superfície de nível 0 de F . Logo, o gradiente de F é ortogonal ao gráfico de f . Compute o gradiente de F .

10. A função $z = z(x, y)$ é diferenciável e dada implicitamente pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Mostre que $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$ é a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0) .

11. a) Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $\begin{cases} z = z(x, y) = e^x \cos y \\ x = x(t, s) = ts \\ y = y(t, s) = \sqrt{t^2 + s^2} \end{cases}$.

b) Verifique, para o item a), a fórmula abaixo (3ª Regra da Cadeia).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

12. Seja $z = f(x, y)$, onde $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$.

a) Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

b) Mostre que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

c) Utilizando a 3ª Regra da Cadeia escreva, como na questão 8, a fórmula matricial relacionando as derivadas.

13. Compute a diferencial das funções abaixo.

(a) $z = x^3y^2$

(b) $z = x \arctan(x + 2y)$

(c) $z = \sin xy$

(d) $u = e^{s^2-t^2}$

(e) $T = \log(1 + p^2 + v^2)$

(f) $x = \arcsin uv$

14. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$. Compute um valor aproximado:

(a) para a variação Δz em z , quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

(b) para z , correspondente a $x = 1,02$ e $y = 1,002$.

15. Seja $z = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$. Compute:

(a) o diferencial de z no ponto $(1, 8)$.

(b) um valor aproximado para z correspondente a $x = 1,01$ e $y = 7,9$.

(c) um valor aproximado para a variação Δz em z , quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0,9$ e $y = 8,01$.

16. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

$$f(x, y) = e^{x+5y}, (x_0, y_0) = (0, 0).$$

17. Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1, 1)$.

(a) Utilizando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(x, y)$, sendo $x = 1,001$ e $y = 0,99$.

(b) Avalie o erro que se comete com a aproximação do item (a).

18. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

(a) $f(x, y) = x \sin y$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.