Prova Substitutiva de MAT 145- Cálculo II para Instituto Oceanográfico
06/12/2010

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Extra 6	
Extra 7	
Total	

Nome : ________________GABARITO________________
Nº USP : ________________________________
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens

Boa Sorte!

1. Dadas as retas L_1 e L_2

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad \text{e} \qquad L_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3},$$

determine:

(a) se L_1 e L_2 são paralelas, concorrentes ou reversas.

(b) se forem concorrentes , determine o ponto de intersecção das mesmas.

(c) se forem reversas, compute a distância entre L_1 e L_2.

Resolução: Vide Questão 2, 1ª Prova de Cálculo II-IO-2010.

2. Dê exemplos de funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que (verifique o que afirmar):

a) f admite derivadas parciais em $(0,0)$ mas não é diferenciável em $(0,0)$.

b) f tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ mas não é aí diferenciável.

c) f admite derivadas parciais em $P_0 = (x_0, y_0)$ mas o plano

$$\pi : \ f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0 \,, \ \ z_0 = f(x_0,y_0) = f(P_0) \,,$$

não é tangente ao gráfico de f.

c) existem as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$, $\forall \vec{v}$ unitário, mas não vale a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{v} \ .$$

Solução:

Consideremos a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

(1º) Para que f seja diferenciável investiguemos se o limite abaixo é ou não zero:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \ .$$

Restringindo o cômputo do limite acima sobre a reta $k = h$ obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,h) - 0}{\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{2h^2\sqrt{2h^2}} \ = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{h}{|h|} \,,$$

o qual não existe e consequentemente f **não é diferenciável na origem**.

(b) Dada uma direção $\vec{v} = \langle a, b \rangle$, $|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$, investiguemos a existência da derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ computando o limite:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{ta(tb)^2}{t^2a^2+t^2b^2} - 0\right] = \lim_{t\to 0} ab^2 = ab^2 \ .$$

Logo, **existem todas as derivadas direcionais de f na origem**.

Vide próxima página.

(c) Por (b), as derivadas parciais na origem de $f = f(x, y)$ existem e temos

$$\overrightarrow{\nabla} f(0,0) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right\rangle = \langle 0, 0\rangle \ .$$

Portanto a equação planar citada no enunciado é

$$\pi : \ z = 0 \ .$$

Porém, a curva contida no gráfico de $f = f(x, y)$,

$$\gamma(t) = (\, t, t, f(t,t)\,) = \left(t, t, \frac{t}{2}\right)$$

é tal que $\gamma'(t) = \left\langle 1, 1, \frac{1}{2}\right\rangle$ sendo que tal vetor não é paralelo ao plano $\pi : z = 0$. Donde, tal plano não é tangente ao gráfico de f na origem.

(d) Se F é uma função arbitrária diferenciável na origem, é válida a fórmula

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(0,0) = \overrightarrow{\nabla} F(0,0) \cdot \overrightarrow{v} \ .$$

Assim, se a função f acima dada fosse diferenciável na origem, por (b) e (c) teríamos $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, para todo vetor unitário $\overrightarrow{v}$, o que evidentemente não ocorre para todos os versores já que a fórmula para a as derivadas direcionais é $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = ab^2$ $\blacksquare$

3. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ para

$$z = e^{xy}\mathrm{tg\ y}\ ,\ \begin{cases} x = s + 2t \\ y = \dfrac{s}{t} \end{cases} .$$

Resolução: Temos,

$$z = z(s,t) = e^{\frac{s^2}{t}+2s}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}}\right)$$

e então,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s} = e^{\frac{s^2}{t}+2s}\left(\frac{2s}{t}+2\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}}\right) \ + \ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{t}}+2\mathrm{s}}\,\frac{1}{1+\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{t}^2}}\,\frac{1}{\mathrm{t}} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = e^{\frac{s^2}{t}+2s}\left(-\frac{s^2}{t^2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}}\right) \ + \ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{t}}+2\mathrm{s}}\,\frac{1}{1+\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{t}^2}}\left(-\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}^2}\right) \end{cases} \qquad \blacksquare$$

4. A função $z = z(x, y)$ é diferenciável e é dada pela equação, com $abc \neq 0$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

Mostre que a equação do plano tangente ao gráfico de $z(x, y)$ em (x_0, y_0, z_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1 \ .$$

Solução:

Notemos, para esboçarmos uma figura, que o gráfico de $z = z(x, y)$ está contido no elipsóide $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ainda, o gráfico da função $z = z(x, y)$ está contido na superfície de nível 1 da função $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Assim, o vetor gradiente

$$\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) = \left\langle \frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right\rangle,$$

ortogonal à superfície de nível 1 de $F = F(x, y, z)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, é também normal ao plano tangente ao gráfico de $z = z(x, y)$ neste mesmo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Logo, a equação do plano π, tangente ao gráfico de $z = z(x, y)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é

$$\pi : \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

Mas, escrevendo

$$\tfrac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \tfrac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \tfrac{z_0}{c^2}(z - z_0) = \tfrac{x_0}{a^2}x + \tfrac{y_0}{b^2}y + \tfrac{z_0}{c^2}z - \tfrac{x_0^2}{a^2} - \tfrac{y_0^2}{b^2} - \tfrac{z_0^2}{c^2} =$$

$$= \tfrac{x_0}{a^2}x + \tfrac{y_0}{b^2}y + \tfrac{z_0}{c^2}z - 1 \ ,$$

obtemos a equação

$$\pi : \ \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1 \quad \blacksquare$$

5. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função

$$f(x, y, z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z \ .$$

Solução:

Os pontos críticos satisfazem

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left\langle 3x^2 + 2y - 5, 2x + 2y, 2z - 4 \right\rangle \ .$$

Logo, os pontos críticos são

$$P_1 = (-1, 1, 2) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right) \ ,$$

e a matriz hessiana $\mathcal{H}f$ e o determinante$H_1 f$são

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad , \qquad H_1 f = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 4 \ .$$

No ponto P_1 temos $Hf(P_1) = -32 < 0$, $H_1 f(P_1) < 0$ e $f_{xx}(P_1) - 6 < 0$. Logo, P_1 é um ponto de sela.

No ponto P_2 temos $Hf(P_2) = 16 > 0$, $H_1 f(P_2) = 8 > 0$ e $f_{xx}(P_2) > 0$. Logo, P_2 é um ponto de mínimo local estrito.

6. **Extra.**
Determine o ponto sobre a reta de intersecção dos planos $x + 2y + z = 1$ e $-3x - y + 2z = 4$ que está mais próximo da origem.

Solução:

Vide outra solução em **Lagrange**, em MAT-145-IO-2010, Exemplo 6, pg. 9-10.

Minizemos a função $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, que indica o quadrado da distância de um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ à origem, sujeita às restrições planares

$$\pi_1 : x + 2y + z = 1 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : -3x - y + 2z = 4 \ .$$

Notemos que o problema pedido tem, geometricamente, uma solução.

Notemos também o plano π_1 é a superfície de nível 1 de $f(x, y, z) = x + 2y + z$ e o plano π_2 é a superfície de nível 4 de $g(x, y, z) = -3x - y + 2z$. Notemos também que os vetores normais a π_1 e π_2 são, respectivamente,

$$\vec{n}_{\pi_1} = \langle 1, 2, 1 \rangle = \vec{\nabla} f(x, y, z) \qquad \text{e} \qquad \vec{n}_{\pi_2} = \langle -3, -1, 2 \rangle = \vec{\nabla} g(x, y, z) \ ,$$

os quais são não paralelos e portanto está satisfeita a condição necessária à aplicação do método dos *Multiplicadores de Lagrange*:

$$\vec{\nabla} f(P) \times \vec{\nabla} g(P) \neq \vec{0} \ .$$

Então, se $P_0 \in \pi_1 \cap \pi_2$ é o ponto procurado, existem reais λ e μ tais que

$$\vec{\nabla} D(P_0) = \lambda \vec{\nabla} f(P) \ + \ \mu \vec{\nabla} g(P) \, ,$$

ou, equivalentemente [utilizando que $\vec{\nabla} f(P) \times \vec{\nabla} g(P) \neq \vec{0}$],

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10x_0 - 10y_0 + 10z_0 = 0 \ .$$

Assim temos, $y_0 = x_0 + z_0$ e substituindo nas equações de π_1 e π_2 encontramos

$$\begin{cases} 3x_0 + 3z_0 = 1 \\ -4x_0 + z_0 = 4 \, , \end{cases}$$

o que implica $x_0 = -\frac{11}{15}$ e $z_0 = \frac{16}{15}$ e, então, $y_0 = \frac{5}{15}$.

Resposta Final: $P_0 = (\ -\frac{11}{15} \, , \frac{5}{15} \, , \frac{16}{15})$ ■

7. **Extra.**
   Seja $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Determine os pontos críticos.
   (b) Compute a matriz hessiana nos pontos críticos. O que o teste do hessiano nos informa ?
   (c) Mostre que f restrita a qualquer reta $y = mx$ pela origem, m uma constante real, tem neste ponto um mínimo local.
   (d) Classifique os pontos críticos encontrados.

   Resolução: Vide **Hessiano** em MAT 145-IO-2010, Exemplo 7, pg. 9.