**Prova Substitutiva de MAT 145- Cálculo II para Instituto Oceanográfico**
**06/12/2010**

| Q | N |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Extra 6 | |
| Extra 7 | |
| Total | |

Nome : ______________________________
N$^{\underline{o}}$USP : ______________________________
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

**Justifique todas as passagens**

**Boa Sorte!**

1. Dadas as retas $L_1$ e $L_2$

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad \text{e} \qquad L_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3},$$

determine:

(a) se $L_1$ e $L_2$ são paralelas, concorrentes ou reversas.

(b) se forem concorrentes , determine o ponto de intersecção das mesmas.

(c) se forem reversas, compute a distância entre $L_1$ e $L_2$.

Solução. Vide Questão 2, 1ª Prova de Cálculo II-IO-2010.

2. Dê exemplos de funções $f : I\!R^2 \to I\!R$ tais que (verifique o que afirmar):

a) $f$ admite derivadas parciais em $(0,0)$ mas não é diferenciável em $(0,0)$.

b) $f$ tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ mas não é aí diferenciável.

c) $f$ admite derivadas parciais em $P_0 = (x_0, y_0)$ mas o plano

$$\pi : \ f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0\,, \ \ z_0 = f(x_0,y_0) = f(P_0)\,,$$

não é tangente ao gráfico de $f$.

c) existem as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$, $\forall \vec{v}$ unitário, mas não vale a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{v}\ .$$

Solução.

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1°) Vejamos se $f$ é diferenciável na origem. Temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Restringindo o cômputo do limite acima sobre a reta $h = k$, vemos que tgal limite não existe [cheque] e portanto $f$ **não é diferenciável na origem**.

(b) Investiguemos a existência de $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, com $\vec{v} = \langle a,b \rangle$ e $|\vec{v}| = 1$. Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} ab^2 = ab^2.$$

Logo, **existem todas as derivadas direcionais na origem**.

(c) Por (b), as derivadas parciais de $f$ na origem existem e temos

$$\nabla f(0,0) = \langle 0,0 \rangle\,.$$

Logo, a equação do plano $\pi$ é

$$\pi : z = 0.$$

Entretanto, a curva contida no no gráico de $f$ e dada por

$$\gamma(t) = (t,t,f(t,t)) = \left(t,t,\frac{t}{2}\right)$$

é tal que $\gamma'(t) = \left\langle 1,1,\frac{1}{2} \right\rangle$ e tal vetor não é paralelo ao plano $\pi : z = 0$. Donde, tal plano $\pi$ **não é tangente ao gráfico de $f$ na origem**.

(d) Basta notar que para todo versor $\vec{v}$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = ab^2 \quad \text{e} \quad \nabla f(0,0).\vec{v} = 0\ \blacksquare$$

3. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ para

$$z = e^{xy}\text{tg y} \ , \ \begin{cases} x = s + 2t \\ y = \dfrac{s}{t} \end{cases} .$$

**Solução.** Temos,

$$z = z(s,t)e^{\frac{s^2}{t}+2s}\text{tg}\left(\frac{\text{s}}{\text{t}}\right)$$

e então

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s}(s,t) = e^{\frac{s^2}{t}+2s}\left(\frac{2s}{t}+2\right)\text{tg}\left(\frac{\text{s}}{\text{t}}\right) + \text{e}^{\frac{\text{s}^2}{\text{t}}+2\text{s}}\left(\frac{1}{\text{t}}\right)\sec^2\left(\frac{\text{s}}{\text{t}}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = e^{\frac{s^2}{t}+2s}\left(-\frac{t^2}{s^2}\right)\text{tg}\left(\frac{\text{s}}{\text{t}}\right) + \text{e}^{\frac{\text{s}^2}{\text{t}}+2\text{s}}\left(-\frac{\text{s}^2}{\text{t}^2}\right)\sec^2\left(\frac{\text{s}}{\text{t}}\right) \end{cases} \blacksquare$$

4. A função $z = z(x,y)$ é diferenciável e é dada pela equação, com $abc \neq 0$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

Mostre que a equação do plano tangente no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1 \ .$$

**Solução.**

O gráfico de $z = z(x,y)$ está contido no elipsóide

$$E: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

Ainda, o gráfico de $z = z(x,y)$ está contido na superfície de nível 1 da função

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Assim, o vetor gradiente

$$\nabla F(x,y,z) = \left\langle \frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right\rangle,$$

ortogonal à superfície de nível 1 da função $f = F(x,y,z)$ no pnto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, é também normal ao plano tangente ao gráfico de $z = z(x,y)$ neste ponto $P_0$. Portanto, a equação de plano $\pi$, tangente ao gráfico de $z = z(x,y)$ em $P_0$ é

$$\pi : \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

Desenvolvendo tal equação e utilizando que

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

encontramos

$$\pi : \ \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1 \ \blacksquare$$

5. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função

$$f(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z \ .$$

**Solução.**

Os pontos críticos satisfazem

$$\nabla f(x,y,z) = \left\langle 3x^2 + 2y - 5, 2x + 2y, 2z - 4 \right\rangle = \langle 0,0,0 \rangle \, .$$

Os pontos críticos são

$$P_1 = (-1,1,2) \ \text{ e } \ P_2 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right) .$$

A matriz hessiana $\mathcal{H}f$ e o determinante hessiano $H_1 f$ são

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad H_1 f = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 4.$$

Em $P_1$, temos

$$Hf(P_1) = -32 < 0, \quad H_1 f(P_1) < 0 \ \text{ e } \ f_{xx}(P_1) < 0.$$

Logo, $P1$ é um ponto de sela.

Em $P_2$, temos

$$Hf(P_2) = 16 > 0, \quad H_1 f(P_2) = 8 > 0 \ \text{ e} f_{xx}(P_2) > 0.$$

Logo, $P_2$ é um ponto de mínimo local estrito■

6. **Extra.**
Determine o ponto sobre a reta de intersecção dos planos $x + 2y + z = 1$ e $-3x - y + 2z = 4$ que está mais próximo da origem.

**Solução.**

Vide outra solução em **Lagrange**, em MAT-145-IO-2010, Exemplo 6, pg. 9-10.

Minimizemos a função $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, que indica o quadrado da distância de um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ à origem, sujeita às restrições planares

$$\pi_1 : \ x + 2y + z = 1 \quad \text{e} \quad \pi_2 : \ -3x - y + 2z = 4.$$

Notemos que, geometricamente, o problema tem uma solução.

Notemos também que o plano $\pi_1$ é a superfície de nível 1 de $f(x, y, z) = x+2y+z$ e o plano $\pi_2$ é a superfície de nível 4 de $g(x, y, z) = -3x - y + 2z$. Notemos também que os vetores normais a $\pi_1$ e $\pi_2$ são, respectivamente,

$$\vec{n}_{\pi_1} = \langle 1, 2, 1\rangle = \nabla f \quad \text{e} \quad \vec{n}_{\pi_2} = \langle -3, -1, 2\rangle = \nabla g,$$

os quais são não paralelos e protanto está satisfeita a condição necessária à aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\vec{\nabla} f(P) \times \vec{\nabla} g(P) \neq \vec{0}.$$

Então, se $P_0 \in \pi_1 \cap \pi_2$ é o ponto procurado, existem números $\lambda$ e $\mu$ tais que

$$\vec{\vec{\nabla}} D(P_0) = \lambda \vec{\vec{\nabla}} f(p) + \mu \vec{\vec{\nabla}} g(P),$$

ou, equivalentemente [utilizando que $\nabla f(P) \times \nabla g(P) \neq \vec{0}$],

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10x_0 - 10y_0 + 10z_0 = 0.$$

Assim temos,

$$y_0 = x_0 + z_0$$

e substituindo nas equações de $\pi_1$ e $\pi_2$ encontramos

$$\begin{cases} 3x_0 & + \ 3z_0 = 1 \\ -4x_0 & + \ \ z_0 = 4, \end{cases}$$

o que implica

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{11}{15}, \frac{5}{15}, \frac{16}{15}\right) \blacksquare$$

7. **Extra.**
Seja $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Determine os pontos críticos.

   (b) Compute a matriz hessiana nos pontos críticos. O que o teste do hessiano nos informa ?

   (c) Mostre que $f$ restrita a qualquer reta $y = mx$ pela origem, $m$ uma constante real, tem neste ponto um mínimo local.

   (d) Classifique os pontos críticos encontrados.

   **Solução.** Vide **Hessiano** em MAT 145-IO-2010, Exemplo 7. pg. 9.