$3^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo II para Oceanográfico - MAT145
01/12/2010

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Extra 6	
Extra 7	
Total	

Nome : ____________________GABARITO____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens

Boa Sorte!

1. Dadas as retas L_1 e L_2

$$L_1 : \ \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-3} \qquad \text{e} \qquad L_2 : \ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}\,,$$

determine:

(a) se L_1 e L_2 são paralelas, concorrentes ou reversas.

(b) se forem concorrentes , determine o ponto de intersecção das mesmas.

(c) se forem reversas, compute a distância entre L_1 e L_2.

Resolução:

Sejam $A = (4, -5, 1) \in L_1$, $B = (2, -1, 0) \in L_2$, $\overrightarrow{v_{L_1}} = \langle 2, 4, -3 \rangle$ e $\overrightarrow{v_{L_2}} = \langle 1, 3, 2 \rangle$.

(a) Como os vetores diretores não são paralelos, as retas não são paralelas. Abaixo veremos se as retas são concorrentes ou reversas.

(b) e (c) Se d é a distância entre L_1 e L_2 então

$$d = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}}}{|\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}}|}\ ,$$

com

$$\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 17\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}\ .$$

Logo, sendo $\overrightarrow{AB} = \langle -2, 4, -1 \rangle$, a distância é

$$d = \frac{1}{\sqrt{342}} |(-2)17 + 4.(-7) + (-1).2| = \frac{64}{\sqrt{342}} = \frac{32\sqrt{38}}{57}\ ,$$

e as retas são não concorrentes e não paralelas. Donde, são reversas ■

2. Dê exemplos de funções $f : I\!R^2 \to I\!R$ tais que (verifique o que afirmar):

   a) f é contínua em $(0,0)$ mas não é diferenciável em $(0,0)$.

   b) f admite derivadas parciais em $(0,0)$ mas não é diferenciável em $(0,0)$.

   c) f tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ mas não é aí diferenciável.

   d) existem as derivadas direcionais $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}$, $\forall \vec{v}$ unitário, mas não vale a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{v} \; .$$

Resolução:

Vide Questão 2 da 2ª Prova de MAT145 - IO - 2010.

3. Considere $f(x,y) = x^2 + (1-x)^3y^2$. Responda (e justifique):

   (a) f tem pontos críticos ? Se sim, determine-os.

   (b) f tem pontos de mínimo e de máximo local ? Se sim, determine-os.

   (c) f tem pontos de mínimo e de máximo absoluto ? Se sim, determine-os.

Resolução:

(a) Temos,

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \left\langle 2x - 3(1-x)^2y^2\,, 2(1-x)^3y \right\rangle = \langle 0\,,0\rangle \Longrightarrow \ \ x = 1 \ \text{ ou } \ y = 0\,,$$

mas $x = 1$ acarreta $f_x(1,y) = \langle 2\,,0\rangle$ e $y = 0$ acarreta $f_x(x,0) = \langle 2x\,,0\rangle$. Logo, $(0,0)$ é o único ponto crítico.

(b) O hessiano de f no único ponto crítico, $(0,0)$, é

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

e então, como $f_{xx}(0,0) > 0$, $(0,0)$ é ponto de mínimo local. Ainda, f não tem outros pontos de mínimo ou de máximo locais.

(c) Como f não tem máximo local então f não tem máximo absoluto. Ainda mais, como $f(4,1) = 14 - 27 = -13$, segue que $f(0,0) = 0$ não é valor mínimo absoluto e portanto f não admite valor mínimo absoluto ■

4. Estude com relação a máximos e mínimos locais e pontos de sela a função,

$$f(x,y,z) = \frac{x^5}{5} + y^4 + z^4 - \frac{x^3}{3} - 2y^2 \ .$$

Resolução:

Pontos críticos: $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \langle x^4 - x^2 \,, 4y^3 - 4y \,, 4z^3 \rangle = \vec{0}$. Logo,

$$x^2(x^2-1) = 0 \,, 4y(y^2-1) = 0 \,, z = 0 \ .$$

Isto é,
$P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,-1,0)$, $P_3 = (0,1,0)$,
$P_4 = (1,0,0)$, $P_5 = (1,-1,0)$, $P_6 = (1,1,0)$,
$P_7 = (-1,0,0)$, $P_8 = (-1,-1,0)$, $P_9 = (-1,1,0)$.

Temos, $f_{xx} = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1)$, $f_{yy} = 12y^2 - 4 = 4(3y^2-1)$, $f_{zz} = 12z^2$ e derivadas mistas nulas. Analisemos as matrizes em P_i $(z=0)$, $1 \le i \le 9$,

$$\mathcal{H}(f)(P_i) = \begin{bmatrix} 2x(2x^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & f_{zz} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_1(f)(P_i) = \begin{bmatrix} 2x(2x^2-1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) \end{bmatrix} \ .$$

Não podemos aplicar o teorema pois o hessiano é zero.

Pontos críticos em que a diagonal de $\mathcal{H}f$ troca de sinal são de sela: No ponto P_4 temos $f_{xx} = 2$ e $f_{yy} = -4$; em P_8 e P_9 temos, $f_{xx} = -2$ e $f_{yy} = 8$.

$P_i = (0, y_i, 0)$, $i = 1,2,3$, são de sela: $x = 0$ não é máximo ou minímo local da restrição $\varphi_i(x) = f(x, y_i, 0) = x^3(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) + (y_i^4 - 2y_i^2)$ pois $(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) < 0$ se $x \approx 0$ e x^3 é positivo à direita de zero e negativo à esquerda.

$P_7 = (-1,0,0)$ é ponto de sela pois $\varphi(z) = f(-1,0,z) = z^4 + \frac{2}{15}$ têm mínimo local estrito em $z = 0$ e $\psi(y) = f(-1,y,0) = \frac{2}{15} + y^4 - 2y^2$, $\psi'' = 12y^2 - 4$ têm máximo local estrito em $y = 0$.

$P_5 = (1,-1,0)$ e $P_6 = (1,1,0)$ são pontos de mínimo local pois as funções de uma variável, $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$, $y^4 - 2y^2$ e z^4 têm mínimo local em $x = 1$, $y = \pm 1$ e $z = 0$, respectivamente, e considerando-as funções de três variáveis, x, y, z, elas têm mínimo local em $(1, \pm 1, 0)$ e, a soma das três, que é f, têm mínimo local em $(1, \pm 1, 0)$ $\blacksquare$

5. Ache P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e Q na reta $x + y = 4$ tais que a distância de P a Q é mínima.

Resolução:

Consideremos um disco fechado $\overline{D}(0; R) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $R > 0$, com o raio R suficientemente grande tal que $\overline{D}(0; R)$ contém a elipse $E : x^2 + y^2 = 6$ e também intercepta um segmento S contido na reta $r : x + y = 4$, vemos que a distância entre a elipse E e a reta r é igual à distância entre a elipse E e o segmento S, ambos subconjuntos compacto do plano. Pelo Teorema de Weierstrass a mínima distância entre a elipse e o segmento S são assumidos.

Sejam P na elipse E e Q na reta r, pontos em que tal distância mínima é assumida.

Consideremos ainda as funções $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e $g(x, y) = x + y$,$(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Claramente, a elipse E é a curva de nível 6 da função f; isto é, $E = f^{-1}(6)$ e a reta r é a curva de nível 4 da função g; isto é, $r = g^{1}(4)$.

Como P é o ponto na elipse E com mínima distância ao ponto Q então

$$\overrightarrow{PQ} \quad \perp \overrightarrow{\nabla} f(P)\ .$$

Ainda, como Q é o ponto na reta r com mínima distância ao ponto P então

$$\overrightarrow{QP} \quad \perp \overrightarrow{\nabla} g(Q)\ .$$

Donde segue, indicando $P = (p_1, p_2) \in E$ e $Q = (q_1, q_2) \in r$,

$$\overrightarrow{\nabla} f(P) = \langle 2p_1\,, 4p_2 \rangle \quad \text{paralelo a} \quad \overrightarrow{\nabla} g(Q) = \langle 1, 1 \rangle\ .$$

e portanto $p_1 = 2p_2$. Substituindo na equação da elipse encontramos $6p_2^2 = 6$ e portanto $p_2 = \pm 1$. Geometricamente é fácil que P se encontra no primeiro quadrante e assim determinamos

$$P = (2\,, 1)\ .$$

Para determinarmos Q notemos que a equação da reta s, perpendicular à reta r e passando por $P = (2, 1)$, é

$$s : x - y = 1$$

e o ponto Q , intersecção das retas r e s, é a solução do sistema

$$\begin{cases} x + y &= 4 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

que nos indica o ponto $Q = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ ■

6. **Extra.**
Ache os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições:

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \qquad \text{e} \qquad x + y + z = 1 \ .$$

Resolução:

Vide "Mutiplicadores de Lagrange" em Cálculo II-IO-2010, Exemplo 5, pg. 9.

7. **Extra.**
Dada $f(x,y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, ache os extremantes e os pontos de sela de f e os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f no quadrado

$$K \;=\; [-1,+1] \times [-1,+1] \;=\; \{(x,y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}\ .$$

Resolução:

Vide "Mutiplicadores de Lagrange" em Cálculo II-IO-2010, Exemplo 7, pg. 11.